

1) Решить ДУ

$$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{y}{x^2}$$

- линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами; это **уравнение Эйлера**.

Линейное ДУ с переменными коэффициентами специального вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y' + a_n y = q(x),$$

где $a, b, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ - постоянные числа, называется **уравнением Эйлера**. Оно приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замен:

$$ax+b = e^t, \text{ если } ax+b > 0;$$

$$ax+b = -e^t, \text{ если } ax+b < 0.$$

Уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены переменной $t = \ln x$ ($x = e^t$).

При этом

$$y'_x = e^{-t} y'_t$$

$$y''_{xx} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

и после подстановки в исходное уравнение получим

$$e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) + \frac{1}{e^t} \cdot e^{-t} y'_t - \frac{1}{e^{2t}} y = 0$$

$$y''_{tt} - y = 0$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \pm 1$$

общее решение

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$$

и

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x$$

Литература:

- 1) Пушкарёв Е.А. "Дифференциальные уравнения в задачах и примерах", 2007, стр. 95 (задача 17.1);
- 2) Аксёнов А.П. "Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения", часть 3, 2005, стр. 360, стр. 395 (задача 55).

Решение ДУ в Maxima 5:

```
ode2('diff(y,x,2)+'diff(y,x)/x=y/x^2, y, x);
```

$$y = \%k2 \, x - \frac{\%k1}{2 \, x}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y'' + \frac{y'}{x} = \frac{y}{x^2}\right);$$

$$y(x) = _C1 \, x + \frac{_C2}{x}$$

2) Решить ДУ

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = (x^2 - 4x + 6)e^x$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

Важно: иметь коэффициент 1 перед производной высшего порядка.

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = (x^2 - 4x + 6)e^x \quad | : x^2 \neq 0$$

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right)e^x$$

- это имеет значение для правильного представления правой части уравнения и последующего применения метода вариации произвольных постоянных при нахождении частного решения неоднородного уравнения.

► Сначала находим **общее** решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

- линейное уравнение с переменными коэффициентами; это уравнение Эйлера. С помощью замены

переменной $t = \ln x$ ($x = e^t$) оно приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

При этом

$$y'_x = e^{-t} y'_t$$

$$y''_{xx} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

и после подстановки в исходное уравнение получим

$$e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) - \frac{4}{e^t} \cdot e^{-t} y'_t + \frac{6}{e^{2t}} y = 0$$

$$y''_{tt} - 5y'_t + 6y = 0$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = 3$$

общее решение

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

и

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, **частное** решение y^* неоднородного уравнения можно найти **методом вариации произвольных постоянных** (метод Лагранжа).

Частное решение y^* исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x)x^2 + C_2(x)x^3$, заменив в общем решении постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} x^2 & x^3 & 0 \\ 2x & 3x^2 & \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right)e^x \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \quad (\text{определитель системы - вронскиан } W(x))$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right)e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -(x^3 - 4x^2 + 6x)e^x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right)e^x \end{vmatrix} = (x^2 - 4x + 6)e^x$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)e^x$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)e^x$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx = -\int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right)e^x dx = -\frac{e^x}{x^2} \cdot (x-3)$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)e^x dx = \frac{e^x}{x^3} \cdot (x-2)$$

Интегралы вычислены в Mathcad 14:

$$-\int \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) \cdot e^x dx \rightarrow -\frac{e^x \cdot (x-3)}{x^2} \quad \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) \cdot e^x dx \rightarrow \frac{e^x \cdot (x-2)}{x^3}$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^* = C_1(x) \cdot x^2 + C_2(x) \cdot x^3 = -\frac{e^x}{x^2} \cdot (x-3) \cdot x^2 + \frac{e^x}{x^3} \cdot (x-2) \cdot x^3 = e^x$$

и общее решение исходного ДУ

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 x^2 + C_2 x^3 + e^x$$

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x2 * y' [x] - 4 x * y' [x] + 6 y[x] == (x2 - 4 x + 6) * Exp[x], y[x], x]
```

$$\{\{y[x] \rightarrow e^x + x^2 C[1] + x^3 C[2]\}\}$$

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007;
- 2) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями", 2005;
- 3) Пушкарёв Е.А. "Дифференциальные уравнения в задачах и примерах", 2007, стр. 95 (задача 17.1);
- 4) Аксёнов А.П. "Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения", часть 3, 2005, стр. 360, стр. 395 (задача 55).