1) Найти решение ДУ $y''+\frac{2}{1-y}\cdot(y')^2=0$,

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Данное уравнение не содержит в явном виде независимой переменной x; интегрируем его методом понижения порядка. Суть метода заключается в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Пусть $y'=p(y(x))$. Продифференцируем это равенство по x:

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot p \quad \text{, т.е. } y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$$

Сделаем подстановки в исходное ДУ:

$$p\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}\cdot p^2=0$$

Т.к. $p\neq 0$ (иначе $y'=0$, что противоречит начальному условию $y'=1$), то

$$\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}\cdot p=0$$

- получено ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy}=\frac{2p}{(y-1)}$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{2\,dy}{(y-1)}$$

$$\ln|p|=2\cdot\ln|y-1|+\ln C_1 \qquad (C_1>0)$$

$$p=(y-1)^2\cdot C_1$$

Заменяя p на y', получаем: $y'=(y-1)^2\cdot C_1$. Подставляя $y=0$ и $y'=1$ в это равенство, находим смещение $C_1=1$.

$$y'=(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2}=dx$$

$$\int\frac{d(y-1)}{(y-1)^2}=\int dx$$

$$\frac{1}{1-y}=x+C_2$$

Находим из начальных условий $y(0)=0$ смещение $C_2=1$. Таким образом, частное решение данного ДУ имеет вид:

$$y=\frac{x}{x+1}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(\left\{y''+\frac{2}{1-y}\cdot y'^2=0,\ y(0),\ y'(0)=1\right\}\right);$$

$$y(x)=\frac{x}{1+x}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 348 (пример 49.3).

2) Найти решение ДУ $y''-(y')^2+y'\cdot(y-1)=0$,

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

Уравнение не содержит независимого переменного x. Благодаря этому, полагая $y'_x=p(y(x))$, $y''_{xx}=p'_y\cdot y'_x=p'_y\cdot p$, получаем линейное неоднородное ДУ 1-го порядка:

$$p'\cdot p-p^2+p\cdot(y-1)=0$$

$$p\cdot(p'-p+y-1)=0$$

$$p'-p=1-y \qquad (p\neq 0) \qquad (*)$$

Линейное уравнение можно интегрировать по методу Бернулли или по методу Лагранжа [1, стр. 334].

Используем метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной); сначала интегрируем однородное уравнение

$$p'-p=0$$

$$\frac{dp}{dy}=p$$

$$dy=\frac{dp}{p}$$

$$y=\ln|p|+\ln|C_1|$$

$$y=\ln|C_1\cdot p|$$

$$e^y=C_1\cdot p$$

$$p=C\cdot e^y$$

Ищем решение неоднородного уравнения (*) в виде

$p=C(y)\cdot e^y$, где $C(y)$ - неизвестная функция.

Подставляя в исходное уравнение (*) $p=C(y)\cdot e^y$ и $p'=C'(y)\cdot e^y+C(y)\cdot e^y$, получаем

$$C'(y)\cdot e^y+C(y)\cdot e^y-C(y)\cdot e^y=1-y$$

$$C'(y)\cdot e^y=1-y$$

$$C'(y)=\frac{1-y}{e^y}$$

$$C(y)=\int\frac{(1-y)}{e^y}dy=\frac{y}{e^y}+C$$

Таким образом, общее решение ДУ (*)

$$p=\left(\frac{y}{e^y}+C\right)\cdot e^y=y+C\cdot e^y$$

Используем начальные условия

$$2=2+C\cdot e^2$$

$$C=0$$

Частное решение:

$$p=y$$

Возвращаясь к замене, получаем

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = e^{x+C}$$

Используем начальные условия

$$2 = e^{0+C}$$

$$C = \ln 2$$

$y = e^{x+\ln 2}$ - частное решение исходного ДУ, удовлетворяющее данным начальным условиям

Проверка в Mathcad 14:

$$y(x) := e^{x+\ln(2)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - \left(\frac{d}{dx}y(x)\right)^2 + \frac{d}{dx}y(x)\cdot(y(x) - 1) \text{ simplify } \rightarrow 0$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007;
2) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", 2005, стр. 74 (понижение порядка).

3) Найти общее решение ДУ $x \cdot y'' + (2x - 1) \cdot y' = -4x^2$.

Разделим уравнение на $x \neq 0$:

$$y'' + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot y' = -4x$$

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка; его общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $\hat{y} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ и произвольного частного решения y^*:

$$y = \hat{y} + y^*$$

а) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Положим $y' = p$ [1], тогда для однородного ДУ:

$$p' + \left(2 - \frac{1}{x}\right) p = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 2\right) p$$

$$\frac{dp}{p} = \left(\frac{1}{x} - 2\right) dx \qquad (p \neq 0)$$

$$\ln|p| = \ln|x| - 2x + C_4$$

$$p = e^{\ln|x| - 2x + C_4} = e^{\ln|x|} \cdot e^{-2x} \cdot e^{C_4} = e^{C_4} \cdot x \cdot e^{-2x}$$

Решение $p = 0$ не вошло в интеграл; включим его в решение, положив $e^{C_4} = C_3$ (тогда возможен случай $C_3 = 0$):

$$p = C_3 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = C_3 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$dy = C_3 \cdot x \cdot e^{-2x} dx$$

$$y = -\frac{C_3}{4} \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + C_2 = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + C_2$$

б) Частное решение линейного неоднородного ДУ найдём методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

$$y^* = C_1(x) \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + C_2(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$$

Составим систему уравнений [2]:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + C_2'(x) \cdot 1 = 0 \\ C_1'(x) \cdot \left(-4x \cdot e^{-2x}\right) + C_2'(x) \cdot 0 = f(x) \end{cases}$$

Решим систему по Крамеру:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} \cdot (2x+1) & 1 \\ -4x \cdot e^{-2x} & 0 \end{vmatrix} = 4x \cdot e^{-2x}$$

(определитель Вронского)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4x & 0 \end{vmatrix} = 4x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} \cdot (2x+1) & 0 \\ -4x \cdot e^{-2x} & -4x \end{vmatrix} = -4x \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1)$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4x}{4x \cdot e^{-2x}} = e^{2x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4x \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1)}{4x \cdot e^{-2x}} = -2x - 1$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) dx = \int (-2x-1) dx = -x^2 - x$$

Итак, частное решение однородного уравнения

$$y^* = \frac{e^{2x}}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + \left(-x^2 - x\right) = \frac{1}{2} - x^2$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) + C_2 + \frac{1}{2} - x^2$$

включим $1/2$ в состав C_2:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} \cdot (2x+1) - x^2 + C_2$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(x \cdot y'' + (2x-1) \cdot y' = -4x^2\right);$$

$$y(x) = -x^2 + \frac{1}{4} _C1 \left(-2x e^{-2x} - e^{-2x}\right) + _C2$$

Литература:

1) Гусак А.А. "Математический анализ и дифференциальные уравнения", 2003, стр. 326, стр. 330 (пример 5);
2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 360.

4) Найти общее решение ДУ $y''\cdot \mathrm{tg}(y)=2\cdot(y')^2$.

Уравнение не содержит явно независимую переменную x. Введём замену $y'=p(y)$, где $p(y)$ - некая неизвестная функция; соответственно $y''=p'(y)\cdot y'=p'(y)\cdot p(y)$. Получаем уравнение

$$p'\cdot p\cdot \mathrm{tg}(y)=2\cdot p^2$$

$$p\cdot\left(p'\cdot \mathrm{tg}(y)-2\cdot p\right)=0$$

1) $p=0$

$y'=0$

$y\equiv \mathrm{const}$

- первое решение ДУ

2) $p'\cdot \mathrm{tg}(y)-2\cdot p=0$

$$\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{\mathrm{tg}\, y}$$

$$\ln|p|=2\cdot\ln|\sin y|+\ln|C|$$

$$\ln|p|=\ln\left(C\cdot\sin^2 y\right)$$

$$p=C\cdot\sin^2 y$$

Т.е.

$$\frac{dy}{dx}=C_2\cdot\sin^2 y$$

$$\frac{dy}{\sin^2 y}=C_2dx$$

$$-\mathrm{ctg}(y)=C_2x-C_1$$

$$\mathrm{ctg}(y)=C_1-C_2x$$

- второе решение ДУ

Объединяя решения, запишем ответ в виде совокупности $y=\left[\begin{array}{l}\mathrm{const}\in R\\ \mathrm{arcctg}\left(C_1-C_2x\right)+\pi k,\quad k\in R\end{array}\right.$

Решение в Maple 12:

$dsolve\left(y''\cdot\tan(y)=2\cdot y'^2\right);$

$$y(x)=-\arctan\left(\frac{1}{_C1\,x+_C2}\right)$$

Литература:

1) Аксёнов А.П. "Математика. Обыкновенные дифференциальные уравнения", 2005, стр. 246 (пример).

5) Найти решение задачи Коши

$$y''=32y^3,\quad y(4)=1,\quad y'(4)=4.$$

Ягубов.РФ

- уравнение не содержит явно независимой переменной x. Для понижения порядка уравнения введём новую функцию $y'_x = p(y)$; тогда $y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$ и уравнение принимает вид:

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = 32y^3$$

$$p\,dp = 32y^3 dy$$

$$\frac{p^2}{2} = 32 \cdot \frac{y^4}{4} + \frac{C_1}{2}$$

$$p^2 = 16y^4 + C_1$$

Константу C_1 находим из начальных условий $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.

$$4^2 = 16 \cdot 1^4 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Так что

$$(y')^2 = 16y^4$$

$$y' = \pm 4y^2$$

- уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \pm 4y^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = \pm 4dx$$

$$-\frac{1}{y} = \pm 4x - C_2$$

$$y = \frac{1}{\pm 4x + C_2}$$

Константу C_2 находим из начальных условий $y(4) = 1$.

$$1 = \frac{1}{\pm 16 + C_2}$$

$C_2 = -15$ - для случая $y = \frac{1}{4x + C_2}$, т.е. $y = \frac{1}{4x - 15}$;

$C_2 = 17$ - для случая $y = \frac{1}{-4x + C_2}$, т.е. $y = \frac{1}{-4x + 17}$.

Или

$$y = \frac{1}{\pm 4 \cdot (x - 4) + 1}$$

- найдены два частных решения, удовлетворяющие начальным условиям.

Проверка найденных решений в Mathcad 14:

$$y1(x) := \frac{1}{4 \cdot (x - 4) + 1} \qquad y2(x) := \frac{1}{-4 \cdot (x - 4) + 1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y1(x) - 32 \cdot y1(x)^3 \text{ simplify } \rightarrow 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y2(x) - 32 \cdot y2(x)^3 \text{ simplify } \rightarrow 0$$

6) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''\cdot(1+y)-5\cdot(y')^2=0$$

Данное уравнение не содержит в явном виде независимой переменной x; интегрируем его методом понижения порядка. Суть метода заключается в том, что с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

Пусть $y'=p(y(x))$. Продифференцируем это равенство по x:

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot p \quad \text{, т.е. } y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$$

Сделаем подстановки в исходное ДУ:

$$p\cdot\frac{dp}{dy}\cdot(1+y)-5p^2=0$$

$$p\cdot\left(\frac{dp}{dy}\cdot(1+y)-5p\right)=0$$

- получаем два ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{dy}=\frac{5p}{(1+y)}$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{5d(y+1)}{(y+1)}$$

$$\ln|p|=5\cdot\ln|y+1|+\ln|C_1|$$

$$p=\pm(y+1)^5\cdot C_1$$

$$\pm\frac{dy}{dx}=(y+1)^5\cdot C_1$$

$$\pm\frac{dy}{(y+1)^5}=C_1\,dx$$

$$\mp\frac{1}{4\cdot(y+1)^4}=C_1\cdot x+C_2$$

$$\frac{1}{4\cdot(y+1)^4}=|C_1\cdot x+C_2|$$

$$p=0$$

$$\frac{dy}{dx}=0$$

$$y=C_3$$

Отнесём множитель 4 в счёт констант, и запишем решение в виде

$$(y+1)^4=\frac{1}{|C_1\cdot x+C_2|}$$

Заметим, что решение $y=C_3$ содержится в этом решении при $C_1=0$ за исключением случая $y=-1$. Так что окончательно общее решение ДУ запишем в виде совокупности

$$\left[\begin{array}{l}(y+1)^4=\dfrac{1}{|C_1\cdot x+C_2|}, \qquad \{C_1,C_2\}\in R\\ y=-1\end{array}\right.$$

ЯГУБОВ.РФ

Решение в Maxima 5:

```
ode2('diff(y,x,2)*(1+y)-5*'diff(y,x)^2=0, y, x);
```

$$-\frac{1}{4\,\%k1\,y^4+16\,\%k1\,y^3+24\,\%k1\,y^2+16\,\%k1\,y+4\,\%k1}=x+\%k2$$

```
factor(%);
```

$$-\frac{1}{4\,\%k1\,(y+1)^4}=x+\%k2$$

7) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''=(y')^2$$

- уравнение не содержит явно искомой функции y.

Обозначим $y'=p(x)$; тогда $y''=p'$ и уравнение принимает вид

$$x^2p'=p^2$$

- получено уравнение с разделяющимися переменными.

$$x^2\frac{dp}{dx}=p^2$$

$$\frac{dp}{p^2}=\frac{dx}{x^2}$$

$$\int p^{-2}dp=\int x^{-2}dx$$

$$-\frac{1}{p}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{C_1}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{C_1}$$

$$p=\frac{xC_1}{x+C_1}$$

Возвращаемся к исходной переменной и получаем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xC_1}{x+C_1}=C_1-\frac{C_1^2}{x+C_1}$$

$$dy=\left(C_1-\frac{C_1^2}{x+C_1}\right)dx$$

$$y=C_1\cdot\int dx-C_1^2\cdot\int\frac{d(x+C_1)}{x+C_1}$$

$$y=C_1x-C_1^2\cdot\ln|x+C_1|+C_2$$

$y=C_1\cdot\left(x-C_1\cdot\ln|x+C_1|\right)+C_2$ - общее решение исходного уравнения.

Агубов.рф

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x^2 * y''[x] == y'[x]^2, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{x}{C[1]} + C[2] - \frac{\mathrm{Log}[-1 + x\,C[1]]}{C[1]^2}\right\}\right\}$$

Решение ДУ в Maple 12:

$$dsolve\left(x^2 \cdot y''(x) = (y'(x))^2\right)$$

$$y(x) = -\frac{x}{_C1} - \frac{\ln(-1 + _C1\,x)}{_C1^2} + _C2$$

Решение ДУ в Maxima 5:

```
ode2(x^2*'diff(y,x,2)='diff(y,x)^2, y, x);
```

$$y = -\frac{\log(\%k1\,x - 1)}{\%k1^2} - \frac{x}{\%k1} + \%k2$$

Ягубов.РФ