1) Найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 - x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/9.$$

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ имеет корни действительные и различные $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение y^* неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: методом неопределённых коэффициентов [1, стр. 362].

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$,

$Q_n(x)$ - многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^0 \cdot \left(A \cdot x^2 + B \cdot x + C\right) \cdot e^{0 \cdot x} = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

Тогда

$$\left(y^*\right)' = 2A \cdot x + B$$

$$\left(y^*\right)'' = 2A$$

Подставив y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение, получим

$$2A - 5 \cdot (2Ax + B) + 6 \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = x^2 - x$$

$$x^2 \cdot 6A + x \cdot (-10A + 6B) + (2A - 5B + 6C) = x^2 - x$$

и вычислим коэффициенты A, B и C:

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = -1 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1/6 \\ B = 1/9 \\ C = 1/27 \end{cases}$$

Частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x + \frac{1}{27}$$

и, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \cdot x + \frac{1}{27}$$

► Найдём константы C_1 и C_2, соответствующие данным начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1/9$.

$$y' = 2C_1 \cdot e^{2x} + 3C_2 \cdot e^{3x} + \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1/27 \\ 1/9 = 2C_1 + 3C_2 + 1/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -1/9 \\ C_2 = 2/27 \end{cases}$$

Так что частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид:

$$y = -\frac{1}{9}\cdot e^{2x} + \frac{2}{27}\cdot e^{3x} + \frac{1}{6}\cdot x^2 + \frac{1}{9}\cdot x + \frac{1}{27}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y''-5\,y'+6\,y=x^2-x\right);$$

$$y(x) = e^{2\,x}\,\_C2 + e^{3\,x}\,\_C1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{9}\,x + \frac{1}{6}\,x^2$$

$$dsolve\left(\left\{y''-5\,y'+6\,y=x^2-x,\, y(0)=0,\, y'(0)=\frac{1}{9}\right\}\right);$$

$$y(x) = \frac{2}{27}\,e^{3\,x} - \frac{1}{9}\,e^{2\,x} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9}\,x + \frac{1}{6}\,x^2$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

2) Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'' + 2y' + y = x$.

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 1 = 0$ имеет корни действительные и одинаковые $k_{1,2} = -1$.
Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 2]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x}$$

► В случае, если правая часть ДУ с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, частное решение y^* неоднородного уравнения может быть найдено более простым способом: методом неопределённых коэффициентов [1, стр. 362].

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 362, случай 1]

$$f(x) = P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$$

где r – число, равное кратности α как корня характеристического уравнения,
n - порядок многочлена $P_n(x)$,
$Q_n(x)$ - многочлен степени n, записанный с неопределёнными коэффициентами,

т.е.

$$y^* = x^0 \cdot (A \cdot x + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B$$

Тогда

$$(y^*)' = A$$

$$(y^*)'' = 0$$

Подставив y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение, получим

$$2A + Ax + B \equiv x$$

и вычислим коэффициенты A и B:

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

Частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = x - 2$$

и, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x e^{-x} + x - 2$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve(y'' + 2\,y' + y = x);$$

$$y(x) = e^{-x}\_C2 + e^{-x}\,x\,\_C1 - 2 + x$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения y^* неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 8 = 0$ имеет корни комплексные сопряжённые $k_{1,2} = 2 \pm 2i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 358, случай 3]

$$\hat{y} = C_1 e^{2x} \cos(2x) + C_2 e^{2x} \sin(2x)$$

► Рассматривая правую часть исходного ДУ как имеющую особый вид, частное решение ДУ найдём методом неопределённых коэффициентов.

Правая часть ДУ имеет вид [1, стр. 363, случай 2]

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x)$$

поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x)$$

где r - число, равное кратности $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения,

n - порядок многочлена $P_n(x)$, m - порядок многочлена $Q_m(x)$,

$M_l(x)$ и $N_l(x)$ - многочлены степени l с неопределёнными коэффициентами,

l - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l=\max(n,m)$.

т.е.

$$y^*=x^0\cdot e^x\cdot(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)=e^x\cdot(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)$$

Тогда

$$\left(y^*\right)'=e^x\cdot((A+B)\cdot\cos x+(-A+B)\cdot\sin x)$$

$$\left(y^*\right)''=2e^x\cdot(B\cdot\cos x-A\cdot\sin x)$$

Подставив y^*, $\left(y^*\right)'$, $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение, получим

$$2e^x\cdot(B\cdot\cos x-A\cdot\sin x)-4\cdot e^x\cdot((A+B)\cdot\cos x+(-A+B)\cdot\sin x)+8\cdot e^x\cdot(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)=$$
$$=e^x(3\sin x+5\cos x)$$

$$2\cdot(B\cdot\cos x-A\cdot\sin x)-4\cdot((A+B)\cdot\cos x+(-A+B)\cdot\sin x)+8\cdot(A\cdot\cos x+B\cdot\sin x)=3\sin x+5\cos x$$

$$(4A-2B)\cdot\cos x+(2A+4B)\cdot\sin x=3\sin x+5\cos x$$

$$\begin{cases}4A-2B=5\\2A+4B=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}A=13/10\\B=1/10\end{cases}$$

Поэтому частное решение имеет вид

$$y^*=\frac{e^x}{10}\cdot(13\cos x+\sin x)$$

а общее решение исходного уравнения

$$y=\hat{y}+y^*=C_1e^{2x}\cos(2x)+C_2e^{2x}\sin(2x)+\frac{e^x}{10}\cdot(13\cos x+\sin x)$$

Решение в Maple 11:

```
> Eq:=diff(y(x),x$2)-4*diff(y(x),x)+8*y(x)=exp(x)*(3*sin(x)+5*cos(x));
```

$$Eq:=\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right)-4\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+8\,y(x)=e^x\,(3\sin(x)+5\cos(x))$$

```
> dsolve(Eq,y(x));
```

$$y(x)=e^{(2x)}\sin(2x)\,\_C2+e^{(2x)}\cos(2x)\,\_C1+\frac{1}{10}e^x\,(\sin(x)+13\cos(x))$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.