1) Решить ДУ

$$y'' + 4y = \cos^2 x$$

- линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 4y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет комплексные сопряжённые корни $k_{1,2} = 0 \pm 2i$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 358, случай 3]

$$\hat{y} = e^{0x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x\right) = C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) \cdot \cos 2x + C_2(x) \cdot \sin 2x$, заменив в общем решении постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составим систему уравнений [1, стр. 360]

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos 2x + C_2'(x) \cdot \sin 2x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (\cos 2x)' + C_2'(x) \cdot (\sin 2x)' = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos 2x + C_2'(x) \cdot \sin 2x = 0 \\ -C_1'(x) \cdot 2\sin 2x + C_2'(x) \cdot 2\cos 2x = \cos^2 x \end{cases}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \cos^2 x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\cos^2 x \cdot \sin 2x = -2\cos^3 x \cdot \sin x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \cos^2 x \end{vmatrix} = \cos^2 x \cdot \cos 2x = 2\cos^4 x - \cos^2 x$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\cos^3 x \cdot \sin x$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \cos^4 x - \frac{1}{2} \cdot \cos^2 x$$

$$C_1(x) = -\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx = \int \cos^3 x \, d(\cos x) = \frac{1}{4}\cos^4 x$$

$$C_2(x) = \int \left(\cos^4 x - \frac{1}{2} \cdot \cos^2 x\right) dx = \int \left(\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \left((1+\cos 2x)^2 - (1+\cos 2x)\right) dx = \frac{1}{4} \cdot \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - 1 - \cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \left(\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4} \cdot \int \left(\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

Ягубов.РФ

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\cdot\int dx+\frac{1}{8}\cdot\int\cos 4x\,dx=\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x$$

Частное решение данного уравнения:

$$y^*=C_1(x)\cdot\cos 2x+C_2(x)\cdot\sin 2x=\frac{1}{4}\cos^4 x\cdot\cos 2x+\left(\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\cdot\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{4}\cos^4 x\cdot\cos 2x+\frac{1}{8}\sin^2 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x\cdot\sin^2 2x=$$

$$=\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos^2 2x+\frac{1}{16}\cos^3 2x+\frac{1}{8}\sin^2 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x\cdot\sin^2 2x=$$

$$=\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{16}\cos^3 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x\cdot\sin^2 2x+\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{1}{16}\cos 2x+\frac{1}{16}\cos^3 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos^3 2x+\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=\hat{y}+y^*=C_1\cdot\cos 2x+C_2\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{x}{8}\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}=$$

$$=\left(C_1+\frac{1}{8}\right)\cdot\cos 2x+\left(C_2+\frac{x}{8}\right)\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}$$

Переобозначим постоянный множитель $\left(C_1+\frac{1}{8}\right)$ как $C_1$, и окончательно запишем общее решение исходного ДУ в виде

$$y=C_1\cdot\cos 2x+\left(C_2+\frac{x}{8}\right)\cdot\sin 2x+\frac{1}{8}$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y''+4\,y=\cos(x)^2\right);$$

$$y(x)=\sin(2\,x)\,_C2+\cos(2\,x)\,_C1+\frac{1}{32}\cos(2\,x)+\frac{1}{8}\sin(2\,x)\,x+\frac{1}{8}$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006.

2) Найти решение задачи Коши

$$y''+16y=\frac{16}{\sin 4x},\quad y\left(\frac{\pi}{8}\right)=3,\quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\pi.$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y=\hat{y}+y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''+16y=0$$

Его характеристическое уравнение $k^2+16=0$ имеет корни комплексные сопряжённые $k_{1,2}=0\pm 4i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 358, случай 3]

$$\hat{y}=C_1e^{0x}\cos(4x)+C_2e^{0x}\sin(4x)=C_1\cos(4x)+C_2\sin(4x)$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^*=C_1(x)\cos(4x)+C_2(x)\sin(4x)$, заменив в общем решении постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} \cos 4x & \sin 4x & 0 \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x & \dfrac{16}{\sin 4x} \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x \end{vmatrix}=4$$ (определитель системы - вронскиан $W(x)$)

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 4x \\ \dfrac{16}{\sin 4x} & 4\cos 4x \end{vmatrix}=-16$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \cos 4x & 0 \\ -4\sin 4x & \dfrac{16}{\sin 4x} \end{vmatrix}=16\cdot\operatorname{ctg}4x$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-4$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=4\cdot\operatorname{ctg}4x$$

$$C_1(x)=\int C_1'(x)\,dx=-4\cdot\int dx=-4x$$

$$C_2(x)=\int C_2'(x)\,dx=4\cdot\int\operatorname{ctg}4x\,dx=\ln|\sin 4x|$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^*=C_1(x)\cos(4x)+C_2(x)\sin(4x)=-4x\cdot\cos(4x)+\ln|\sin 4x|\cdot\sin(4x)$$

и общее решение исходного ДУ

$$y=\hat{y}+y^*=C_1\cos(4x)+C_2\sin(4x)-4x\cdot\cos(4x)+\ln|\sin 4x|\cdot\sin(4x)$$

► Используя начальные условия $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=3$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\pi$, находим константы $C_1$ и $C_2$.

$$y'=\left(C_1\cos(4x)+C_2\sin(4x)-4x\cdot\cos(4x)+\ln|\sin 4x|\cdot\sin(4x)\right)'=$$

$$=-4C_1\sin(4x)+4C_2\cos(4x)-4\cdot(\cos 4x-4x\cdot\sin 4x)+\left(\frac{1}{\sin 4x}\cdot 4\cos 4x\cdot\sin 4x+4\ln|\sin 4x|\cdot\cos(4x)\right)=$$

$$=-4C_1\sin(4x)+4C_2\cos(4x)+16x\cdot\sin 4x+4\ln|\sin 4x|\cdot\cos(4x)$$

$$\begin{cases} C_2=3 \\ -4C_1+2\pi=2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение ДУ имеет вид

$$y = 3\sin(4x) - 4x\cdot\cos(4x) + \ln|\sin 4x|\cdot\sin(4x) =$$
$$= \left(3 + \ln|\sin 4x|\right)\cdot\sin(4x) - 4x\cdot\cos(4x)$$

Решение в Maple 12:

$$dsolve\left(y'' + 16\,y = \frac{16}{\sin(4\,x)}\right);$$
$$y(x) = \sin(4\,x)\,_C2 + \cos(4\,x)\,_C1 + \ln(\sin(4\,x))\,\sin(4\,x) - 4\,x\cos(4\,x)$$
$$dsolve\left(\left\{y'' + 16\,y = \frac{16}{\sin(4\,x)}, y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\,\pi\right\}\right);$$
$$y(x) = 3\,\sin(4\,x) + \ln(\sin(4\,x))\,\sin(4\,x) - 4\,x\cos(4\,x)$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006.

3) Решить ДУ

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y''' + y' = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^3 + k = 0$ имеет один корень действительный $k_1 = 0$ и два корня комплексных спряжённых $k_{2,3} = 0 \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случаи 1 и 3]

$$\hat{y} = C_1\cdot e^{0x} + C_2 e^{0x}\cos(x) + C_3 e^{0x}\sin(x) = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$, заменив в общем решении постоянные $C_1$, $C_2$ и $C_3$ неизвестными функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $C_3(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & -\cos x & -\sin x & \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$ (определитель системы - вронскиан $W(x)$)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \operatorname{tg} x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \operatorname{tg} x$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\sin x$$

$$C_3'(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = -\int \sin x\,dx = \cos x$$

$$C_3(x) = \int C_3'(x)\,dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos} dx = \int \cos dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x - \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

Вычисление интеграла $\int \frac{dx}{\cos x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x =$$

$$= -\ln|\cos x| + \cos x \cdot \cos x + \left(\sin x - \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|\right) \cdot \sin x =$$

$$= -\ln|\cos x| + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| =$$

$$= 1 - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

и общее решение исходного ДУ

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + 1 - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

или

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

ДУБОВ.РФ

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[y'''[x] + y'[x] == Tan[x], y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to C[3] - C[2]\,\mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Log}[\mathrm{Cos}[x]] - 2\,\mathrm{ArcTanh}\left[\mathrm{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]\right]\mathrm{Sin}[x] + C[1]\,\mathrm{Sin}[x]\right\}\right\}$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

4) Решить ДУ

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2)$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 3y' = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$ имеет корни действительные и различные $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{-3x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) + C_2(x)e^{-3x}$, заменив в общем решении постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-3x} & 0 \\ 0 & -3e^{-3x} & \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-3x} \quad \text{(определитель системы - вронскиан } W(x)\text{)}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{9}{1+e^{3x}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} \end{vmatrix} = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{3e^{6x}}{1+e^{3x}}$$

Вычислим интегралы в Mathcad 14:

$$3\cdot\int\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx\rightarrow\ln\left(e^{3\cdot x}+1\right)\qquad -3\cdot\int\frac{e^{6x}}{1+e^{3x}}\,dx\rightarrow\ln\left(e^{3\cdot x}+1\right)-e^{3\cdot x}$$

$$C_1(x)=\int C_1'(x)\,dx=3\cdot\int\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx=\ln\left(1+e^{3x}\right)$$

$$C_2(x)=\int C_2'(x)\,dx=-3\cdot\int\frac{e^{6x}}{1+e^{3x}}\,dx=\ln\left(1+e^{3x}\right)-e^{3x}$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^*=C_1(x)+C_2(x)e^{-3x}=\ln\left(1+e^{3x}\right)+\left(\ln\left(1+e^{3x}\right)-e^{3x}\right)\cdot e^{-3x}=$$

$$=\ln\left(1+e^{3x}\right)+e^{-3x}\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)-1=\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)-1$$

и общее решение исходного ДУ

$$y=\hat{y}+y^*=C_1+C_2\cdot e^{-3x}+\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)-1$$

или

$$y=C_1+C_2\cdot e^{-3x}+\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)$$

Используем начальные условия $y(0)=\ln 4,\quad y'(0)=3(1-\ln 2)$ для нахождения констант $C_1$ и $C_2$:

$$y'=\left(C_1+C_2\cdot e^{-3x}+\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)'=$$

$$=-3C_2\cdot e^{-3x}-3e^{-3x}\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)+\frac{3e^{3x}\left(1+e^{-3x}\right)}{\left(1+e^{3x}\right)}$$

$$\begin{cases}C_1+C_2+2\ln 2=\ln 4\\-3C_2-3\ln 2+3=3(1-\ln 2)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1=0\\C_2=0\end{cases}$$

Так что

$$y=\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)$$

- частное решение исходного ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

Проверка найденных решений в Mathcad 14:

$$y(x):=C_1+C_2\cdot e^{-3x}+\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)\qquad\frac{d^2}{dx^2}y(x)+3\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)-\frac{9\cdot e^{3x}}{1+e^{3x}}\ \text{simplify}\ \rightarrow 0$$

$$y(x):=\left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)\qquad y(0)\rightarrow 2\cdot\ln(2)$$

$$p(x):=\frac{d}{dx}y(x)\qquad p(0)\rightarrow 3-3\cdot\ln(2)$$

ЯГУБОВ.РФ

5) Решить ДУ

$$x^2y''-2xy'+2y=\frac{6}{x}$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y=\hat{y}+y^*$.

**Важно!** Для используемого далее метода Лагранжа коэффициент у старшего члена в левой части ДУ должен быть равен 1. Поэтому разделим уравнение на $x^2\neq 0$:

$$y''-\frac{2y'}{x}+\frac{2y}{x^2}=\frac{6}{x^3}$$

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения (можно использовать левую часть исходного уравнения, т.к. всё равно будет происходить сокращение):

$$x^2y''-2xy'+2y=0$$

- это уравнение Эйлера (см. пример 10).

Уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены переменной $t=\ln x$ ($x=e^t$).

При этом

$$y'_x=e^{-t}y'_t$$

$$y''_{xx}=e^{-2t}\left(y''_{tt}-y'_t\right)$$

и после подстановки в исходное уравнение получим

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(y''_{tt}-y'_t\right)-2e^t\cdot e^{-t}y'_t+2y=0$$

$$y''_{tt}-3y'_t+2y=0$$

Характеристическое уравнение получившегося уравнения $k^2-3k+2=0$ имеет корни действительные и различные $k_1=1,\ k_2=2$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\hat{y}=C_1\cdot e^t+C_2\cdot e^{2t}=C_1\cdot x+C_2\cdot x^2$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^*=C_1(x)\cdot x+C_2(x)\cdot x^2$, заменив в общем решении постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & \frac{6}{x^3} \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2 \qquad \text{(определитель системы - вронскиан } W(x)\text{)}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{6}{x^3} & 2x \end{vmatrix}=-\frac{6}{x} \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{6}{x^3} \end{vmatrix}=\frac{6}{x^2}$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{6}{x^3}$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{6}{x^4}$$

$$C_1(x)=\int C_1'(x)\,dx=-6\cdot\int\frac{dx}{x^3}=\frac{3}{x^2}$$

$$C_2(x)=\int C_2'(x)\,dx=6\cdot\int\frac{dx}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^*=C_1(x)\cdot x+C_2(x)\cdot x^2=\frac{3}{x^2}\cdot x-\frac{2}{x^3}\cdot x^2=\frac{3}{x}-\frac{2}{x}=\frac{1}{x}$$

и общее решение исходного ДУ

$$y=\hat{y}+y^*=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{x}$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x^2 * y''[x] - 2 x * y'[x] + 2 y[x] == 6 / x, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to\frac{1}{x}+x\,C[1]+x^2\,C[2]\right\}\right\}$$

Проверка найденного решения в Mathcad 14:

$$y(x):=C_1\cdot x+C_2\cdot x^2+\frac{1}{x}$$

$$x^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)-2x\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)+2\cdot y(x)-\frac{6}{x}\ \text{simplify}\ \rightarrow 0$$

6) Решить ДУ

$$y'''+y'=\operatorname{tg}x$$

- это линейное неоднородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y=\hat{y}+y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'''+y'=0$$

Его характеристическое уравнение $k^3+k=0$ имеет один корень действительный $k_1=0$ и два корня комплексных спряжённых $k_{2,3}=0\pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случаи 1 и 3]

$$\hat{y}=C_1\cdot e^{0x}+C_2e^{0x}\cos(x)+C_3e^{0x}\sin(x)=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$, заменив в общем решении постоянные $C_1$, $C_2$ и $C_3$ неизвестными функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $C_3(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x & 0 \\ 0 & -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & -\cos x & -\sin x & \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(определитель системы - вронскиан $W(x)$)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \operatorname{tg} x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \operatorname{tg} x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \operatorname{tg} x$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\sin x$$

$$C_3'(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = -\int \sin x\,dx = \cos x$$

$$C_3(x) = \int C_3'(x)\,dx = -\int \sin x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos} dx = \int \cos dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x - \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

Вычисление интеграла $\int \frac{dx}{\cos x}$:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$$

ягубов.рф

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x =$$
$$= -\ln|\cos x| + \cos x \cdot \cos x + (\sin x - \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|)\cdot \sin x =$$
$$= -\ln|\cos x| + \cos^2 x + \sin^2 x - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| =$$
$$= 1 - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

и общее решение исходного ДУ

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x + 1 - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

или

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| - \sin x \cdot \ln|\operatorname{tg} x + \sec x|$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[y'''[x] + y'[x] == Tan[x], y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to C[3] - C[2]\,\mathrm{Cos}[x] - \mathrm{Log}[\mathrm{Cos}[x]] - 2\,\mathrm{ArcTanh}\left[\mathrm{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]\right]\mathrm{Sin}[x] + C[1]\,\mathrm{Sin}[x]\right\}\right\}$$

7) Решить ДУ

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

- это линейное неоднородное ДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения представляет собой сумму общего решения $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y^*$ неоднородного уравнения: $y = \hat{y} + y^*$.

► Сначала находим общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 3y' = 0$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$ имеет корни действительные и различные $k_1 = 0$, $k_2 = -3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения [1, стр. 357, случай 1]

$$\hat{y} = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{-3x} = C_1 + C_2 \cdot e^{-3x}$$

► Если известно общее решение $\hat{y}$ соответствующего однородного уравнения, частное решение $y^*$ неоднородного уравнения можно найти методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Частное решение $y^*$ исходного уравнения ищем в виде $y^* = C_1(x) + C_2(x)e^{-3x}$, заменив в общем решении постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Для их нахождения составляем систему линейных уравнений [1, стр. 353; 2, стр. 106]

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-3x} & 0 \\ 0 & -3e^{-3x} & \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} \end{pmatrix}$$

Решаем её по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-3x} \\ 0 & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-3x}$$ (определитель системы - вронскиан $W(x)$)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{9}{1+e^{3x}}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}} \end{vmatrix} = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{3e^{6x}}{1+e^{3x}}$$

Вычислим интегралы в Mathcad 14:

$$3\cdot\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx \rightarrow \ln\left(e^{3\cdot x}+1\right) \qquad -3\cdot\int \frac{e^{6x}}{1+e^{3x}}\,dx \rightarrow \ln\left(e^{3\cdot x}+1\right) - e^{3\cdot x}$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = 3\cdot\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx = \ln\left(1+e^{3x}\right)$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = -3\cdot\int \frac{e^{6x}}{1+e^{3x}}\,dx = \ln\left(1+e^{3x}\right) - e^{3x}$$

Так что частное решение однородного уравнения

$$y^* = C_1(x) + C_2(x)e^{-3x} = \ln\left(1+e^{3x}\right) + \left(\ln\left(1+e^{3x}\right) - e^{3x}\right)\cdot e^{-3x} =$$

$$= \ln\left(1+e^{3x}\right) + e^{-3x}\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right) - 1 = \left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right) - 1$$

и общее решение исходного ДУ

$$y = \hat{y} + y^* = C_1 + C_2\cdot e^{-3x} + \left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right) - 1$$

или

$$y = C_1 + C_2\cdot e^{-3x} + \left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)$$

Используем начальные условия $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 3(1-\ln 2)$ для нахождения констант $C_1$ и $C_2$:

$$y' = \left(C_1 + C_2\cdot e^{-3x} + \left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)' =$$

$$= -3C_2\cdot e^{-3x} - 3e^{-3x}\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right) + \frac{3e^{3x}\left(1+e^{-3x}\right)}{\left(1+e^{3x}\right)}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2\ln 2 = \ln 4 \\ -3C_2 - 3\ln 2 + 3 = 3(1-\ln 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Так что

$$y = \left(1+e^{-3x}\right)\cdot\ln\left(1+e^{3x}\right)$$

- частное решение исходного ДУ, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

ЯГУБОВ.РФ

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007.

Проверка найденных решений в Mathcad 14:

$$y(x) := C_1 + C_2 \cdot e^{-3x} + \left(1 + e^{-3x}\right) \cdot \ln\left(1 + e^{3x}\right) \qquad \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 3\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) - \frac{9 \cdot e^{3x}}{1 + e^{3x}} \text{ simplify } \rightarrow 0$$

$$y(x) := \left(1 + e^{-3x}\right) \cdot \ln\left(1 + e^{3x}\right) \qquad y(0) \rightarrow 2 \cdot \ln(2)$$

$$p(x) := \frac{d}{dx} y(x) \qquad p(0) \rightarrow 3 - 3 \cdot \ln(2)$$

Ягубов.РФ