Найти общее решение ДУ $3x\cdot\left(e^{y}-y'\right)=1$.

Пусть $e^{y}=u$, тогда $e^{y}\cdot y'=u'$, и

$$y'=e^{y}-\frac{1}{3x}$$

$$\frac{u'}{u}=u-\frac{1}{3x}$$

$$u'=u^{2}-\frac{u}{3x} \qquad (1)$$

Это уравнение Рикатти [1, стр. 73]; его можно проинтегрировать в том случае, если найдём хотя бы одно его частное решение. Иногда такое решение удаётся подобрать исходя из вида свободного члена уравнения $\left(c(x)\right)$. В данном примере попытаемся искать его в виде $u=\frac{k}{x}$. Подставляя $u(x)$ в уравнение (1), получим

$$-\frac{k}{x^{2}}=\frac{k^{2}}{x^{2}}-\frac{k}{3x^{2}}$$

$$k_{1}=0$$

$$k_{2}=-\frac{2}{3}$$

и соответственно

$$u_{1}=0$$

$$u_{2}=-\frac{2}{3x}$$

- два решения уравнения (1). Далее замена $u=z-\frac{2}{3x}$ приводит исходное уравнение к уравнению

$$z'+\frac{2}{3x^{2}}=z^{2}-\frac{4z}{3x}+\frac{4}{9x^{2}}-\frac{z}{3x}+\frac{2}{9x^{2}}$$

$$z'=z^{2}-\frac{5z}{3x}$$

Умножая обе части этого уравнения на x^{2}, получаем

$$z'\cdot x^{2}=z^{2}\cdot x^{2}-\frac{5}{3}\cdot zx$$

$$\left|\begin{array}{l}(zx)'=z'x+z\\ x\cdot(zx)'=z'x^{2}+zx\end{array}\right.$$

$$x\cdot\frac{d}{dx}(zx)-zx=(zx)^{2}-\frac{5}{3}\cdot(zx)$$

Обозначим $zx=v$:

$$x\cdot\frac{dv}{dx}-v=v^{2}-\frac{5}{3}\cdot v$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v^{2}-\frac{2}{3}\cdot v$$

$$\frac{dv}{v^{2}-\frac{2}{3}\cdot v}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\ln\left|3v-2\right|-\ln\left|v\right|\right)=\ln\left|x\right|+\ln C_{1}$$

$$\ln\left|\frac{3v-2}{v}\right| = \ln\left(C_1 \cdot x\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3v-2}{v} = C \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

$$v = \frac{2}{3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

Возвращаемся к заменам

$$z = \frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$u = \frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)} - \frac{2}{3x}$$

$$y = \ln\left(\frac{2}{x \cdot \left(3 - C \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)} - \frac{2}{3x}\right) = \ln\left(\frac{2}{\frac{9}{C} x^{\frac{1}{3}} - 3x}\right)$$

Переобозначим $\frac{9}{C}$ как C, и окончательно решение запишем в виде

$$y = \ln\left(\frac{2}{C \cdot \sqrt[3]{x} - 3x}\right)$$

Проверка подстановкой решения в исходное уравнение (Mathcad 14):

$$y(x) := \ln\left(\frac{2}{C \cdot \sqrt[3]{x} - 3x}\right) \qquad 3x \cdot \left(e^{y(x)} - \frac{d}{dx} y(x)\right) \text{ simplify } \rightarrow 1$$

Решение ДУ в Maple 10:

```
> Eq:=3*x*(exp(y(x))-diff(y(x),x))=1;# ДУ
```

$$Eq := 3\,x\left(e^{y(x)} - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)\right) = 1$$

```
> dsolve(Eq,y(x));# общее решение ДУ
```

$$y(x) = \ln\left(-\frac{2}{3\,x - \_C1\,x^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\right)$$

Литература:

1) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. "Дифференциальные уравнения: примеры и задачи", 1989, стр. 73 (пример 1.87);

2) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями", 2005, стр. 51 (уравнение Рикатти);

3) Степанов В.В. "Курс дифференциальных уравнений", 1990, стр. 47...55 (уравнение Рикатти).