

Дифференциальное уравнение  $y' = f(x; y)$  называется **однородным**, если функция  $f(x; y)$  есть однородная функция нулевого порядка.

Функция  $f(x; y)$  называется **однородной функцией**  $n$ -го порядка (измерения), если при умножении каждого её аргумента на произвольный множитель  $\lambda$  вся функция умножается на  $\lambda^n$ , т.е.

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x; y).$$

1) Найти общее решение однородного дифференциального уравнения

$$x^2 y' = y^2 + xy + x^2$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены

переменной: пусть  $u = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = ux$  и  $y' = u'x + u$ .

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u = u^2 + u + 1$$

$$\frac{du}{dx} x = u^2 + 1$$

$$\frac{du}{u^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\arctg u = \ln|x| + C$$

Возвращаемся к переменной  $y$ :

$$\arctg \frac{y}{x} = \ln|x| + C$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\ln|x| + C)$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg}(\ln|x| + C) \text{ - общее решение ДУ.}$$

Решение ДУ в Mathematica 6:

```
DSolve[x^2 * Y'[x] == Y[x]^2 + x * Y[x] + x^2, Y[x], x]
{{Y[x] -> x Tan[C[1] + Log[x]]}}
```

Решение в Maple 17:

```
dsolve(x^2*y'=y^2 + x*y + x^2);
y(x) = tan(ln(x) + _C1) x
```

Решение в Maxima 5:

```
ode2(x^2*'diff(y,x)=y^2+x*y+x^2, y, x);
      atan\left(\frac{y}{x}\right)
%c x = %e
```

Действительно, если константу  $C$  прибавить в виде

$$\arctg u = \ln|x| + \ln|C|, \text{ то}$$

$$Cx = e^{\arctg u}$$

$$Cx = e^{\arctg\left(\frac{y}{x}\right)}$$

2) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x \cdot y' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$\frac{x dy}{dx} = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$(2y^2 + 5x^2) \cdot x dy = (3y^3 + 10yx^2) dx$$

- это однородное уравнение

Пусть  $y = u \cdot x$ , тогда  $dy = x du + u dx$ , и

$$(2u^2 x^2 + 5x^2) \cdot x(x du + u dx) = (3u^3 x^3 + 10ux^3) dx$$

$$(2u^2 + 5) \cdot (x du + u dx) = (3u^3 + 10u) dx$$

$$(2u^2 + 5) \cdot x du = (u^3 + 5u) dx$$

$$\frac{(2u^2 + 5) du}{(u^3 + 5u)} = \frac{dx}{x}$$

Правильную рациональную алгебраическую дробь в левой части равенства представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2u^2 + 5}{u^3 + 5u} = \frac{2u^2 + 5}{u \cdot (5 + u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 5} = \frac{A \cdot (5 + u^2) + (Bu + C) \cdot u}{u \cdot (5 + u^2)} = \frac{u^2 \cdot (A + B) + u \cdot C + 5A}{u \cdot (5 + u^2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = 0 \\ 5A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\int \left( \frac{1}{u} + \frac{u}{u^2 + 5} \right) du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| + \frac{1}{2} \cdot \ln(u^2 + 5) = \ln|x| + \ln|C|$$

$$u \cdot \sqrt{u^2 + 5} = C \cdot x$$

$$\frac{y}{x} \cdot \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5} = C \cdot x$$

$$y^2 = \frac{C^2 x^6}{y^2 + 5x^2} \quad \text{- общее решение ДУ} \quad (C \in \mathbb{R})$$

- запись результата в виде дроби позволяет учесть ОДЗ исходного ДУ:  $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ .

*Литература:*

1) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", 2005, стр. 27 (пример 1).

Сделаем проверку, продифференцировав неявно заданную функцию  $y^2 \cdot (y^2 + 5x^2) = C^2 x^6$ .

$$y^4 + 5x^2 y^2 = C^2 x^6$$

$$4y^3 y' + 5 \cdot 2x y^2 + 5x^2 \cdot 2y y' = 6C^2 x^5$$

$$y' \cdot (4y^3 + 10x^2 y) = 6C^2 x^5 - 10x y^2$$

$$y' \cdot (2y^3 + 5x^2 y) = 3C^2 x^5 - 5x y^2$$

$$C^2 = \frac{y^2}{x^6} \cdot (y^2 + 5x^2) = \frac{y^4}{x^6} + \frac{5y^2}{x^4}$$

$$y' y \cdot (2y^2 + 5x^2) = \frac{3y^4}{x} + 15y^2 x - 5x y^2$$

$$y' y \cdot (2y^2 + 5x^2) = \frac{3y^4}{x} + 10y^2 x$$

$$y' x \cdot (2y^2 + 5x^2) = 3y^3 + 10y x^2$$

$$x \cdot y' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

То же самое в Mathcad 14:

$$F(x, y) := y^2 - \frac{C^2 \cdot x^6}{y^2 + 5x^2} \quad y' := - \left( \frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \right)$$

$$x \cdot y' \left| \begin{array}{l} \text{substitute } C^2 = \frac{y^2}{x^6} \cdot (y^2 + 5x^2) \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{y \cdot (10 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2)}{5 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2}$$

*Литература:*

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 20012, стр. 317 (дифференцирование неявной функции).

3) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y - x y' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y'.$$

$$y' \cdot (x + \sqrt{x^2 + y^2}) - y = 0 \quad | : x \neq 0$$

$$y' \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \right) - \frac{y}{x} = 0$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть  $u = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = ux$  и  $y' = u'x + u$ .

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$(u'x + u) \cdot (1 + \sqrt{1 + u^2}) - u = 0$$

$$u'x + u'x \cdot \sqrt{1 + u^2} + u \cdot \sqrt{1 + u^2} = 0$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x (1 + \sqrt{1 + u^2}) = -u \cdot \sqrt{1 + u^2}$$

$$\frac{(1+\sqrt{1+u^2}) du}{u \cdot \sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(1+\sqrt{1+u^2}) du}{u \cdot \sqrt{1+u^2}} = \left[ \begin{array}{l} 1+u^2 = t^2, \quad t > 0 \\ 2u du = 2t dt \\ du = \frac{t dt}{u} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t-1} = \ln|t-1| + C = \ln|\sqrt{1+u^2} - 1| + C$$

$$-\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C$$

и получаем

$$\ln|\sqrt{1+u^2} - 1| = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|\sqrt{1+u^2} - 1| + \ln|x| = \ln|C|$$

Возвращаемся к переменной  $y$  :

$$\ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1\right| + \ln|x| = \ln|C|$$

$$\ln|\sqrt{x^2 + y^2} - x| = \ln|C|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = C$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2Cx + C^2$$

$$y^2 = (2x + C) \cdot C \quad \text{- общее решение ДУ.}$$

4) Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$(10x - y - 9) dy = (x + 8y - 9) dx$$

$$(x + 8y - 9) dx + (y - 10x + 9) dy = 0$$

Данное уравнение приводится к однородному переносом начала координат в точку пересечения прямых  $x + 8y - 9 = 0$  и  $y - 10x + 9 = 0$  :

$$\begin{cases} x + 8y - 9 = 0 \\ y - 10x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Сделаем подстановку  $x_1 = x - 1$  и  $y_1 = y - 1$ ; при этом  $dx = dx_1$ ,  $dy = dy_1$  :

$$(x_1 + 8y_1) dx_1 + (y_1 - 10x_1) dy_1 = 0$$

$$(10x_1 - y_1) \frac{dy_1}{dx_1} = (x_1 + 8y_1)$$

$$\left(10 - \frac{y_1}{x_1}\right) \frac{dy_1}{dx_1} = \left(1 + \frac{8y_1}{x_1}\right)$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены

переменной: пусть  $u = \frac{y_1}{x_1}$ , тогда  $y_1 = ux_1$  и  $y_1' = u'x_1 + u$ .

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$(10 - u) \cdot (u'x_1 + u) = 1 + 8u$$

$$u'x_1 + u = \frac{1 + 8u}{10 - u}$$

$$\frac{du}{dx_1} x_1 = \frac{1 + 8u}{10 - u} - u$$

$$\frac{du}{dx_1} x_1 = \frac{u^2 - 2u + 1}{10 - u}$$

$$\frac{10 - u}{u^2 - 2u + 1} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\frac{10 - u}{(u - 1)^2} du = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$\left(\frac{1 - u}{(u - 1)^2} + \frac{9}{(u - 1)^2}\right) du = \frac{dx_1}{x_1}$$

$$-\int \frac{du}{u - 1} + 9 \cdot \int \frac{du}{(u - 1)^2} = \int \frac{dx_1}{x_1}$$

$$-\ln|u - 1| + 9 \cdot \left(-\frac{1}{u - 1}\right) = \ln|x_1| + \ln|C|$$

$$-\ln|u - 1| + 9 \cdot \left(-\frac{1}{u - 1}\right) = \ln|x_1| + \ln|C|$$

$$\ln|x_1| + \ln|C| + \ln|u - 1| = -\frac{9}{u - 1}$$

$$\ln|Cx_1 \cdot (u - 1)| = -\frac{9}{u - 1}$$

Возвращаемся к переменной  $y$ :

$$\ln\left|Cx_1 \cdot \left(\frac{y_1}{x_1} - 1\right)\right| = \frac{9}{1 - \frac{y_1}{x_1}}$$

и

$$\ln\left|C(x - 1) \cdot \left(\frac{y - 1}{x - 1} - 1\right)\right| = \frac{9}{1 - \frac{y - 1}{x - 1}}$$

$$\ln|C(y - 1 - x + 1)| = \frac{9(x - 1)}{x - 1 - y + 1}$$

$$\ln|C(x - y)| = \frac{9(x - 1)}{x - y} \quad \text{- общее решение ДУ.}$$

*Литература:*

1) Пушкарь Е.А. "Дифференциальные уравнения в задачах и примерах", 2007, стр. 24 (задача 4.3).

5) Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' + 2\sqrt{xy} = y, \quad y(1) = 1.$$

$$xy' + 2\sqrt{xy} = y$$

Разделим уравнение на  $x \neq 0$ :

$$y' = \frac{y}{x} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены

переменной: пусть  $u = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = ux$  и  $y' = u'x + u$ .

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u = u - 2\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{dx} x = -2\sqrt{u}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{-2dx}{x}$$

$$2\sqrt{u} = -2\ln|x| - 2C$$

$$\sqrt{u} = -\ln|x| - C$$

Возвращаемся к переменной  $y$ :

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = -\ln|x| - C$$

$$\frac{y}{x} = (-\ln|x| - C)^2$$

$$y = x \cdot (\ln|x| + C)^2 \quad \text{- общее решение ДУ.}$$

Найдём константу  $C$ , соответствующую данному начальному условию  $y(1) = 1$ :

$$1 = 1 \cdot (\ln 1 + C)^2$$

$$C = \pm 1$$

и тогда

$$y = x \cdot (\ln|x| \pm 1)^2$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = x \cdot \ln^2 |ex| \\ y = x \cdot \ln^2 \left| \frac{x}{e} \right| \end{array} \right]$$

- найдены два частных решения ДУ, удовлетворяющие начальному условию  $y(1) = 1$ .

Решение ДУ в Maple 17:

$$\text{dsolve}(x \cdot y' + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} = y)$$

$$\frac{y(x)}{\sqrt{xy(x)}} + \ln(x) - \_C1 = 0$$

$$\text{dsolve}(\{x \cdot y' + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} = y, y(1) = 1\})$$

$$y(x) = \ln(x)^2 x - 2 \ln(x) x + x$$

6) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

$$y' + \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} = 0$$

- это однородное ДУ; преобразуем его в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной: пусть  $u = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = ux$  и  $y' = u'x + u$ .

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$u'x + u + \frac{1-u}{1+u} = 0$$

$$\frac{du}{dx} x = -u - \frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{\left(-u - \frac{1-u}{1+u}\right)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{(1+u)du}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{(1+u)du}{1+u^2} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} + \int \frac{u du}{1+u^2} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \cdot \ln |1+u^2| = -\ln |x| + C$$

$$\operatorname{arctg} u + \ln \sqrt{1+u^2} + \ln |x| = C$$

Возвращаемся к переменной  $y$ :

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \ln |x| = C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} + \ln |x| = C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \frac{|x| \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{|x|} = C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C \quad \text{- общее решение ДУ.}$$

Решение уравнения проверим дифференцированием:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C$$

$$\left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right)'_x = 0$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (2x + 2y \cdot y') = 0$$

$$\frac{y' \cdot x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + y \cdot y'}{x^2 + y^2} = 0$$

$$y' \cdot x - y + x + y \cdot y' = 0$$

$$y' \cdot (y + x) = y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

$$\frac{dx}{y + x} = \frac{dy}{y - x}$$