

1) Найти общее решение ДУ

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \cdot \frac{y}{x} + 3$$

Запишем уравнение в виде

$$2y' = \left(\frac{y}{x} + 3\right)^2 - 6 \quad (1)$$

Сделаем замену

$$\frac{y}{x} + 3 = u \quad | \cdot x \neq 0$$

$$y = (u - 3) \cdot x$$

$$y' = u'x + u - 3$$

Подставим полученные выражения в уравнение (1):

$$2u'x + 2u - 6 = u^2 - 6$$

$$2u'x = u^2 - 2u$$

$$\frac{du}{u \cdot (u - 2)} = \frac{dx}{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{u-2} \right) du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|u| + \ln|u-2| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\frac{u-2}{u} = Cx$$

$$u = \frac{2}{1-Cx}$$

Возвращаясь к замене, получаем:

$$\frac{y}{x} + 3 = \frac{2}{1-Cx}$$

$$y = \frac{2x}{1-Cx} - 3x$$

- общее решение ДУ.

Решение в Maple 13:

$$\text{dsolve}\left(2 \cdot y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6 \cdot \frac{y}{x} + 3\right);$$

$$y(x) = -\frac{x(-1 + 3x_C1)}{-1 + x_C1}$$

2) Решить дифференциальное уравнение

$$2xy' - y = y' \ln(yy')$$

$$2xy' = y + y' \ln(yy')$$

$$x = \frac{y + y' \ln(yy')}{2y'} = \frac{y}{2y'} + \frac{\ln(yy')}{2}$$

- уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной, но разрешённое относительно аргумента. Его можно решить введением параметра $y' = p$. Тогда

$$x = \frac{y}{2p} + \frac{\ln(y p)}{2} \quad (y \neq 0, p \neq 0)$$

Находим дифференциал этой функции $x = f(y, p)$ по формуле дифференцирования функции двух переменных $dx = f'_y dy + f'_p dp$:

$$dx = \frac{2p dy - 2y dp}{(2p)^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{p}{yp} dy + \frac{y}{yp} dp \right)$$

$$2dx = \frac{p dy - y dp}{p^2} + \left(\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} \right)$$

С учётом $dx = \frac{dy}{p}$ получим

$$2dx = \frac{dy}{p} - \frac{y dp}{p^2} + \left(\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} \right)$$

$$dx = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} - \frac{y dp}{p^2}$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} - \frac{y dp}{p^2}$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{y} \right) dy = \left(\frac{1}{p} - \frac{y}{p^2} \right) dp$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{\left(1 - \frac{y}{p} \right)}{\left(1 - \frac{p}{y} \right)}$$

$$y' = \frac{\left(1 - \frac{y}{p} \right)}{\left(1 - \frac{p}{y} \right)} \text{ - однородное уравнение.}$$

Пусть $u = \frac{y}{p}$, тогда $y = up$ и $y' = u'p + u$:

$$u'p + u = \frac{(1-u)}{\left(1 - \frac{1}{u} \right)}$$

$$\frac{du}{dp} p = \frac{(1-u)}{\left(1 - \frac{1}{u} \right)} - u$$

$$\frac{du}{dp} p = -2u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dp}{p}$$

$$\ln|u| = -2\ln|p| + \ln|C|$$

$$u = \frac{C}{p^2}$$

Возвращаемся к переменной y :

$$\frac{y}{p} = \frac{C}{p^2}$$

$$y = \frac{C}{p}$$

и

$$y = \frac{C}{y'}$$

$$y dy = C dx$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$$

Установим взаимосвязь констант C_1 и C_2 , подставив полученный результат в исходное уравнение:

$$x = \frac{y}{2y'} + \frac{\ln(yy')}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}$$

$$y' = \pm \frac{1}{2} (C_1 x + C_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot C_1 = \pm \frac{C_1}{2\sqrt{C_1 x + C_2}}$$

$$x = \frac{(C_1 x + C_2)}{C_1} + \frac{\ln C_1}{2}$$

$$\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\ln C_1}{2}$$

$$C_1 \ln C_1 = -2C_2$$

$$C_2 = -\frac{C_1 \ln C_1}{2}$$

Следовательно ($C = C_1$)

$$y^2 = 2Cx - C \ln C$$

$$y^2 = C \cdot (2x - \ln C)$$

или, переобозначив константу, поскольку $y \neq 0$, окончательно запишем

$$y^2 = e^C \cdot (2x - C) \text{ - общее решение ДУ.}$$

Решение в Mathematica 12:

$\text{dsolve}(2 x \cdot y' - y = y' \cdot \ln(y \cdot y'))$

$$y(x) = \sqrt{\frac{2 e^{-1} (e^{-C1})^2 x}{(e^x)^2} + \frac{e^{-1} (e^{-C1})^2}{(e^x)^2} - \frac{2 e^{-1} (e^{-C1})^2 - C1}{(e^x)^2} e^x}$$

$$y(x) = -\sqrt{\frac{2 e^{-1} (e^{-C1})^2 x}{(e^x)^2} + \frac{e^{-1} (e^{-C1})^2}{(e^x)^2} - \frac{2 e^{-1} (e^{-C1})^2 - C1}{(e^x)^2} e^x}$$

что после упрощения принимает вид

$$y^2 = e^C \cdot (2x - C)$$