1) Вычислить с помощью тройного интеграла объём тела, ограниченного поверхностями

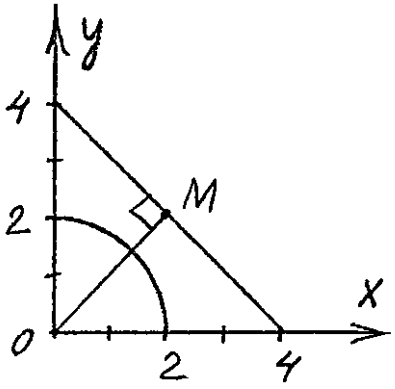
$$z = 0$$

$$z = 4 - x - y$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Сделать чертёж данного тела и его проекцию на координатную плоскость xOy.

Взаимное расположение линий пересечения поверхностей с плоскостью $z = 0$:



$OM = 2\sqrt{2} > 2$

Проекция тела на плоскость xOy - круг с центром $(0;0)$ и радиусом 2:

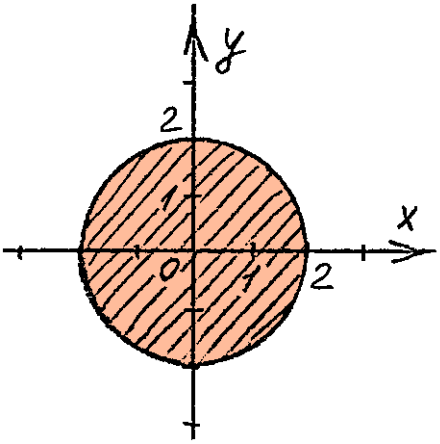
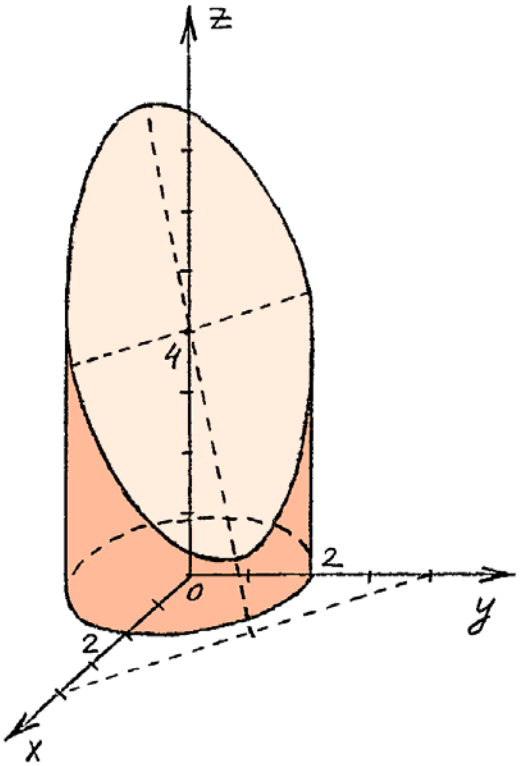


Чертёж тела в координатах $Oxyz$:



В данном случае удобнее вычисление интеграла производить в цилиндрических координатах. Объём тела V в цилиндрических координатах выражается формулой

$$V = \iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Так что

$$V = \iiint\limits_V r\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} r\,dr \int\limits_0^{4-r\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} r\cdot\left(4 - r\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(4r - (\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot r^2\right)dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(4\cdot\frac{r^2}{2} - (\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)d\varphi = \left(8\varphi - \frac{8}{3}\cdot(-\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \left(16\pi + \frac{8}{3}\right) - \left(0 + \frac{8}{3}\right) = 16\pi$$

Ответ: $V = 16\pi$.

Вычисление интеграла в Mathcad 14:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r\cdot(\sin(\phi)+\cos(\phi))} r\,dz\,dr\,d\phi \rightarrow 16\cdot\pi$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 398 (объём тела).

2) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", 2001, стр. 304 (пример 3, цилиндрические координаты).