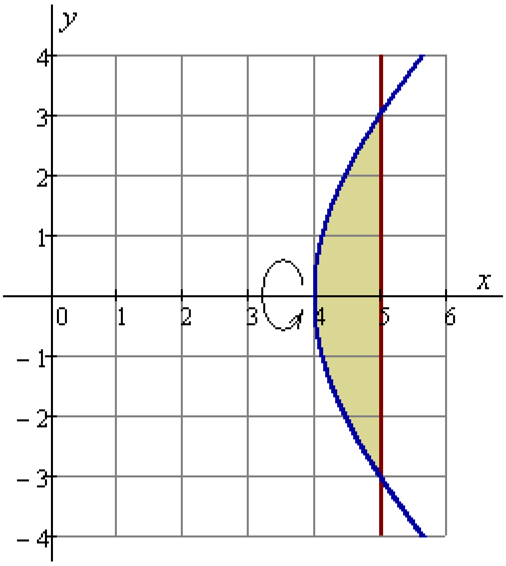
Тела вращения.

Объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox.

1) Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 - y^2 = 16, \quad x = 5.$$

Фигура ограничена правой половинкой гиперболы и прямой:



Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox, вычислим по формуле

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx.$$

Вычисляем:

$$V = \pi \cdot \int_4^5 \left(x^2 - 16\right) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^3}{3} - 16x\right)\Bigg|_4^5 = \pi \cdot \left[\left(\frac{5^3}{3} - 16 \cdot 5\right) - \left(\frac{4^3}{3} - 16 \cdot 4\right)\right] = \frac{13\pi}{3}$$ (куб. ед.)

Вычисление интеграла в Mathcad 15:

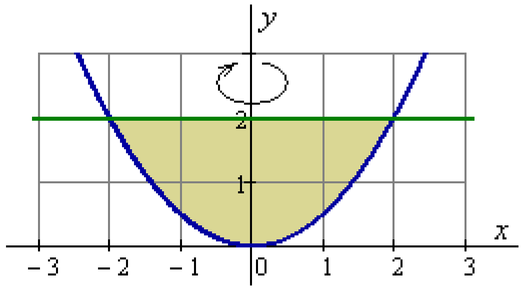
$$\pi \cdot \int_4^5 \left(x^2 - 16\right) dx \rightarrow \frac{13 \cdot \pi}{3}$$

Объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Oy.

2) Сделайте чертёж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями

$$x^2 - 2y = 0, \quad y - 2 = 0.$$

Чертёж области, ограниченной заданными линиями:



Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Oy , вычислим по формуле

$$V = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy .$$

Вычисляем:

$$V = \pi \cdot \int_0^2 x^2 dy = \pi \cdot \int_0^2 2y\, dy = 2\pi \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = \pi \cdot \left(2^2 - 0^2\right) = 4\pi \quad \text{(куб. ед.)}$$

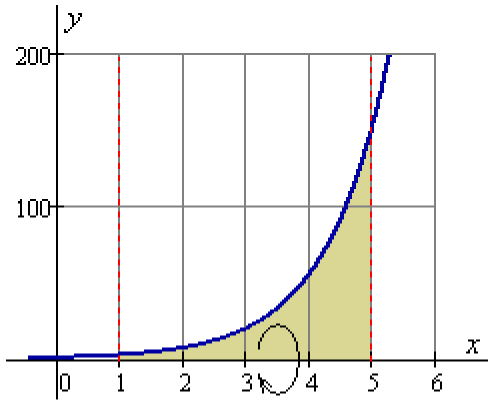
Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2014, стр. 288.

Площадь боковой поверхности тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Ox .

3) Найти площадь боковой поверхности тела, образованного вращением вокруг Ox фигуры

$$y = e^x , \quad 1 < x < 5 .$$



► Площадь боковой поверхности вращения определим по формуле

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Т.е.

$$S = 2\pi \cdot \int_1^5 e^x \cdot \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Вычислим сначала неопределённый интеграл

$$\int e^x \cdot \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \begin{bmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{1+t^2}\,dt = \begin{bmatrix} t = \operatorname{sh} u \\ u = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \\ \sqrt{1+t^2} = \operatorname{ch} u \\ dt = \operatorname{ch} u\,du \end{bmatrix} =$$

$$= \int \operatorname{ch}^2 u\,du = \frac{1}{2}\cdot\int(\operatorname{ch} 2u+1)\,du = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2u + u\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + \frac{u}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}t\cdot\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) + C = \frac{1}{2}e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right) + C$$

Так что

$$S = 2\pi\cdot\int_1^5 e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \pi\cdot\left(e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}} + \ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \pi\cdot\left(e^5\cdot\sqrt{1+e^{10}} + \ln\left(e^5+\sqrt{1+e^{10}}\right) - e\cdot\sqrt{1+e^2} - \ln\left(e+\sqrt{1+e^2}\right)\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(e^5\cdot\sqrt{1+e^{10}} - e\cdot\sqrt{1+e^2} + \ln\frac{e^5+\sqrt{1+e^{10}}}{e+\sqrt{1+e^2}}\right) \approx 69188 \text{ (кв. ед.)}$$