1) Задана пластина неравенством $x^2+y^2 \le 2y$ в декартовой системе координат и плотностью γ материала, из которого изготовлена пластина $\gamma=\gamma(x,y)=|x|$. Найти массу пластины.

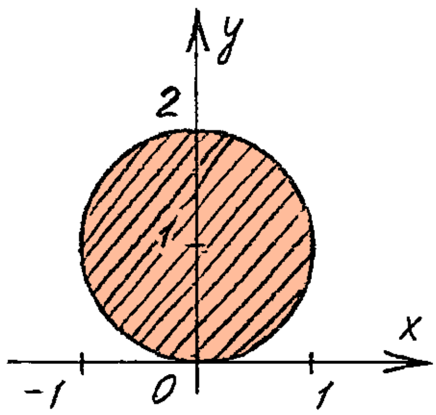
Преобразуем исходное неравенство, выделив полный квадрат по переменной y:

$$x^2+y^2-2y\le 0$$

$$x^2+\left(y^2-2y+1\right)-1\le 0$$

$$x^2+(y-1)^2\le 1$$

- пластина представляет собой круг с центром $O(0;\,1)$ и радиусом 1.



Массу плоской пластины D с переменной плотностью $\gamma=\gamma(x,y)$ найдём по формуле

$$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy$$

Находим границы интегрирования по y:

$$x^2+(y-1)^2=1$$

$$(y-1)^2=1-x^2$$

$$y-1=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y=1\pm\sqrt{1-x^2}$$

Следовательно

$$m=\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}dy=\int\limits_{-1}^{1}|x|\cdot\left(1+\sqrt{1-x^2}-1+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$$

$$=2\cdot\int\limits_{-1}^{1}|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\int\limits_{0}^{1}|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\int\limits_{0}^{1}x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=-2\cdot\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)=-\frac{4}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}$$

(при интегрировании было использовано свойство чётности подинтегральной функции при симметричных пределах и метод подведения под знак дифференциала)

Ответ: $m=4/3$.

Вычисление интеграла в Mathcad 14:

$$\int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} |x|\,dy\,dx \rightarrow \frac{4}{3}$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 388 (масса плоской пластины), стр. 390 (пример 53.4).