

1) Вычислить точно по формуле Ньютона-Лейбница и приближённо по формуле прямоугольников интеграл

$$\int_1^3 \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

► Точное вычисление по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^3 \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^3 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot (\ln 10 - \ln 2) = \frac{\ln 5}{2} \approx 0,80472$$

► Формула средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Отрезок $[1; 3]$ разобьём например на $n = 10$ частей
(чем мельче разбиение, тем точнее результат, но больше объём вычислений).

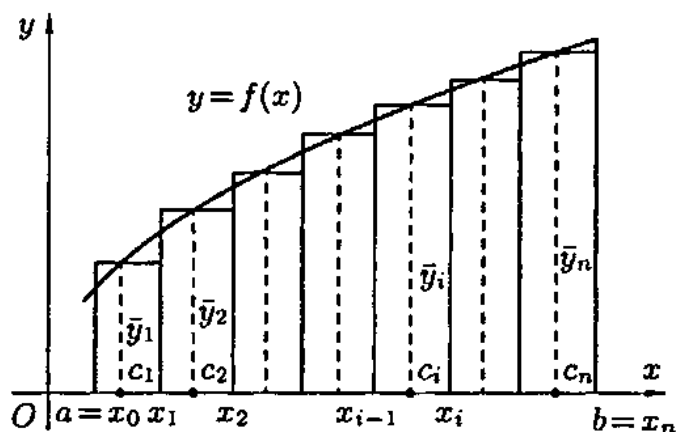
Итак:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$a = 1, b = 3$$

$$n = 10$$

Иллюстрация к методу средних прямоугольников:



Результаты промежуточных вычислений сведём в таблицу:

i	$\frac{x_{i-1} + x_i}{2}$	$y(x)$
1	1,1	0,49774
2	1,3	0,48327
3	1,5	0,46154
4	1,7	0,43702
5	1,9	0,41215
6	2,1	0,38817
7	2,3	0,36566
8	2,5	0,34483
9	2,7	0,32569
10	2,9	0,30818

$$\int_1^3 \frac{x dx}{x^2 + 1} \approx \frac{3-1}{10} \cdot (0,49774 + 0,48327 + 0,46154 + 0,43702 + 0,41215 + \\ + 0,38817 + 0,36566 + 0,34483 + 0,32569 + 0,30818) = 0,80485$$

Результат приближённого вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников: $0,80485$. Точное значение интеграла: $0,80472$. Абсолютная погрешность полученного результата составляет

$$|0,80485 - 0,80472| = 0,00013; \text{ относительная погрешность равна } \frac{0,00013}{0,80472} \cdot 100\% \approx 0,016\%.$$

Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 298 (формула средних прямоугольников);
- 2) Гусак А.А. "Математический анализ и дифференциальные уравнения", 2003, стр. 378 (формула левых прямоугольников, формула правых прямоугольников).

Абсолютная погрешность однократного измерения.

В обиходе есть два определения абсолютной погрешности, и, как следствие, относительной погрешности. В математике абсолютная погрешность определяется как

$$\Delta x = |x - x_0|$$

где x - приближённое значение величины;

x_0 - точное значение величины.

В измерительной технике и электротехнике абсолютная погрешность определяется как

$$\Delta x = x - x_0.$$

В последнем случае величина погрешности благодаря сохраняемому знаку более информативна.

Абсолютная погрешность измерений.

Термин "абсолютная погрешность" может иметь смысл оценки максимально возможной абсолютной погрешности измерений. Например, в случае измерения секундомером с ценой шкалы $0,01$ с промежутка времени $t = 5,31$ с результат измерения запишется в виде $t = 5,310 \pm 0,005$ с - абсолютная погрешность измеренного результата полагается равной половине шкалы деления измерительного прибора.

2) Вычислить интеграл

$$\int_6^{21} \sqrt{\frac{x}{3} - 2} dx$$

точно по формуле Ньютона-Лейбница и приближённо по формуле прямоугольников. Отрезок $[6; 21]$ разбить на 10 частей. Найти абсолютную и относительную погрешности вычисления. Промежуточные вычисления вести с четырьмя знаками после запятой. Приближённое значение интеграла привести с округлением до третьего десятичного знака.

► Точное вычисление по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_6^{21} \sqrt{\frac{x}{3} - 2} dx = 3 \cdot \int_6^{21} \sqrt{\frac{x}{3} - 2} d\left(\frac{x}{3} - 2\right) = 3 \cdot \frac{\left(\frac{x}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} \bigg|_6^{21} = 2 \cdot \left(\left(\frac{21}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{6}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}} \right) = \\ = 2 \cdot \left(\left(\frac{21}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{6}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}} \right) = 2 \cdot \left(5^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = 10\sqrt{5} \approx 22,3607$$

► Формула левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Формула правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

По условию задачи:

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - 2\right)^{0,5}$$

$$a = 6, \quad b = 21$$

$$n = 10$$

Отрезок $[6; 21]$ по условию задачи разбиваем на $n = 10$ частей. Тогда шаг суммирования

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{21-6}{10} = 1,5.$$

Результаты промежуточных вычислений сведём в таблицу:

i	x_i	$y(x_i)$
0	6	0,0000
1	7,5	0,7071
2	9	1,0000
3	10,5	1,2247
4	12	1,4142
5	13,5	1,5811
6	15	1,7321
7	16,5	1,8708
8	18	2,0000
9	19,5	2,1213
10	21	2,2361

По формуле левых прямоугольников:

$$I_1 \approx 1,5 \cdot (0,0000 + 0,7071 + 1,0000 + 1,2247 + 1,4142 + 1,5811 + 1,7321 + 1,8708 + 2,0000 + 2,1213) = 20,47695 \approx 20,4770$$

По формуле правых прямоугольников:

$$I_2 \approx 1,5 \cdot (0,7071 + 1,0000 + 1,2247 + 1,4142 + 1,5811 + 1,7321 + 1,8708 + 2,0000 + 2,1213 + 2,2361) = 23,8311$$

Тогда

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{20,4770 + 23,8311}{2} \approx 22,1541 \text{ (для вычисления погрешности)} \approx 22,154 \text{ (результат для ответа)}$$

Результат приближённого вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников: **22,1541**.

Точное значение интеграла: **22,3607**.

Абсолютная погрешность полученного результата составляет

$$\Delta = |22,1541 - 22,3607| = 0,2066$$

относительная погрешность равна

$$\delta = \frac{\Delta}{I} \cdot 100\% = \frac{0,2066}{22,1541} \cdot 100\% \approx 0,93\%.$$

Приближённое вычисление интеграла по формуле парабол

3) Вычислить приближённое значение определённого интеграла $\int_2^{12} \sqrt{x^3 + 4} dx$ с помощью формулы

Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

Формула Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot \left[(y_0 + y_{2n}) + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) \right]$$

По условию задачи:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 4}$$

$$a = 2$$

$$b = 12$$

$$2n = 10 \quad \Rightarrow \quad n = 5$$

Результаты промежуточных вычислений сведём в таблицу:

$i = 0 \dots 2n$	x_i	y_i
0	2	3,464
1	3	5,568
2	4	8,246
3	5	11,358
4	6	14,832
5	7	18,628
6	8	22,716
7	9	27,074
8	10	31,686
9	11	36,538
10	12	41,617

$$\begin{aligned} \int_2^{12} \sqrt{x^3 + 4} dx &\approx \frac{12-2}{6 \cdot 5} \cdot \left[(3,464 + 41,617) + 4 \cdot (5,568 + 11,358 + 18,628 + 27,074 + 36,538) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (8,246 + 14,832 + 22,716 + 31,686) \right] = \\ &= \frac{10}{30} \cdot [45,081 + 4 \cdot 99,166 + 2 \cdot 77,480] = \frac{1}{3} \cdot [45,081 + 396,664 + 154,960] = 198,902 \end{aligned}$$

Ответ: 198,902.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 302 (формула парабол (Симпсона)).