

Занятие 1. **Вводное**

1. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} [x] \cdot y = 1000, \\ x \cdot [y] = 1996. \end{cases}$$
2. Пусть a, b, c – целые числа, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите неравенство: $b(a+c) \leq \sqrt{2}/2$.
3. Сумма четырех натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК¹?
4. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе одну наименьшую и одну наибольшую части, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что Карлсону досталось не менее половины торта.
5. Трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$) такова, что окружность, описанная около треугольника ABD , касается прямой BC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BCD , касается прямой AD .
6. Учащиеся школы построены прямоугольным каре. После этого в каждой колонне выбран самый высокий, и из них выбран самый низкий – им оказался Петя Иванов. Затем в каждой шеренге выбрали самого низкого, и из них выбрали самого высокого – им оказался Ваня Петров. Кто выше, Петя или Ваня?
7. Докажите, что любую сумму, большую 8 копеек, можно выплатить с помощью монет достоинством 3 и 5 копеек.
8. Докажите, что число $a = 0,123\dots 91011\dots$ (подряд выписываемые натуральные числа) – иррационально.
9. В некотором числе переставили цифры, и оно уменьшилось в три раза. Докажите, что это число делится на 27.
10. На координатную плоскость поставлена клякса площадью больше 1. Докажите, что найдутся две точки кляксы с одинаковыми дробными долями координат.

¹ НОК – наименьшее общее кратное.