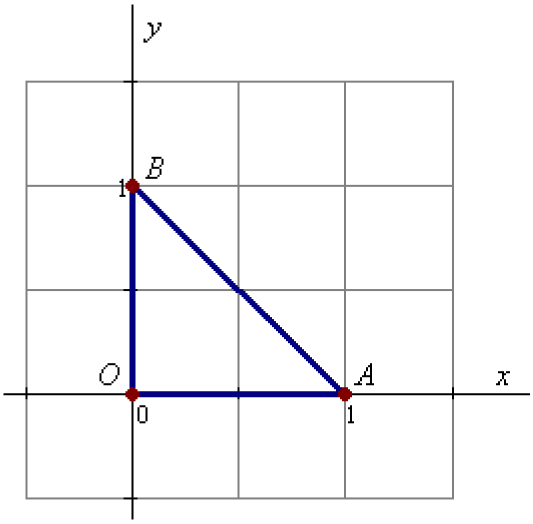
Криволинейный интеграл 1-го рода

1) Вычислить $\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L - контур треугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.



(заметим, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования)

По свойству криволинейного интеграла

$$\int\limits_L \left(f_1(x;y)+f_2(x;y)\right)dl = \int\limits_L f_1(x;y)\,dl + \int\limits_L f_2(x;y)\,dl$$

1-й способ решения

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt\ , \quad (\alpha<\beta)$$

Линия OA:

$$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ t \text{ от } 0 \text{ до } 1 \end{cases}$$

Линия AB:

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ t \text{ от } 0 \text{ до } 1 \end{cases}$$

Линия BO:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ t \text{ от } 1 \text{ до } 0 \end{cases}$$

Следовательно

$$\int\limits_L (x+y)\,dl = \int\limits_0^1 (t+0)\cdot\sqrt{1^2+0^2}\,dt + \int\limits_0^1 (1-t+t)\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}\,dt + \int\limits_0^1 (0+t)\cdot\sqrt{0^2+1^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 t\,dt + \int\limits_0^1 \sqrt{2}\,dt + \int\limits_0^1 t\,dt = 2\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 + \sqrt{2}\cdot t\Big|_0^1 = 1+\sqrt{2}$$

2-й способ решения

При явном задании кривой интегрирования

$$\int_{AB} f(x;y)\,dl = \int_a^b f(x;\varphi(x))\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx\ ,\quad (a<b)$$

или

$$\int_{AB} f(x;y)\,dl = \int_c^d f(\varphi(y);y)\cdot\sqrt{1+(x'_y)^2}\,dy\ ,\quad (c<d)$$

Следовательно

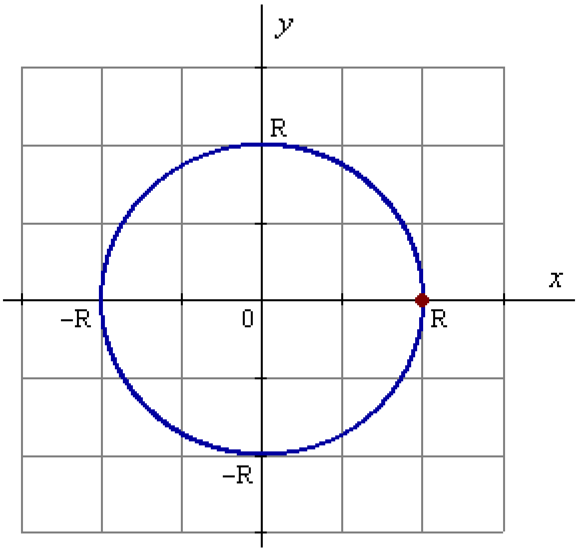
$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^1 (x+0)\cdot\sqrt{1+0^2}\,dx + \int_0^1 (x+(-x+1))\cdot\sqrt{1+(-1)^2}\,dx + \int_0^1 (0+y)\cdot\sqrt{1+0^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{2}\,dx + \int_0^1 y\,dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + \sqrt{2}\cdot x\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2} = 1+\sqrt{2}$$

(для третьего слагаемого воспользовались второй формулой, где интеграл по dy , т.к. иначе при попытке применения первой формулы под интегралом получаем неопределённость вида $[\infty\cdot 0]$)

2) Вычислить интеграл $\int\limits_L xy\,dl$, где L - окружность $x^2+y^2=R^2$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.



В данном случае интегрирование происходит по замкнутой кривой. Заметим, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования.

При полярном задании кривой интегрирования

$$\int_L f(x;y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi\ ;\ \rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi\ ,\quad (\alpha<\beta)$$

Линия L:

$$\begin{cases} \rho = R \\ \varphi \ \text{от } 0 \text{ до } 2\pi \end{cases}$$

Следовательно

$$\int\limits_L xy\,dl = \int\limits_0^{2\pi} R\cos\varphi \cdot R\sin\varphi \cdot \sqrt{R^2 + 0^2}\ d\varphi = R^3 \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi =$$

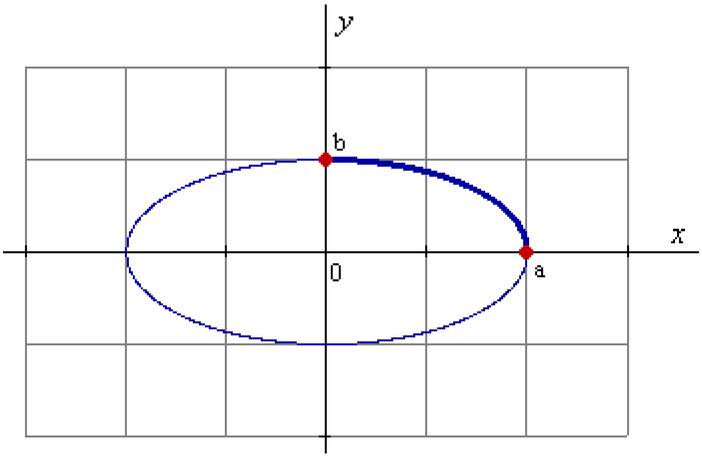
$$= \frac{R^3}{2} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{R^3}{4} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{R^3}{4} \cdot \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

3) Вычислить интеграл

$$\int\limits_L xy\,dl\,,$$

где L - четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.



(криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования)

Получим параметрическое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Сопоставляя это уравнение с основным тригонометрическим тождеством $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, запишем

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

- параметрическое уравнение эллипса.

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt\ ,\quad (\alpha<\beta)$$

В данном случае

$$\int\limits_L xy\,dl = \int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2}\,dt =$$

$$= ab\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \begin{bmatrix}\cos^2 t = u\\ -2\cos t\cdot\sin t\,dt = du\\ t=0:\ u=1\\ t=\dfrac{\pi}{2}:\ u=0\end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{ab}{2}\cdot\int\limits_1^0\sqrt{a^2(1-u)+b^2u}\,du = \frac{a^2b}{2}\cdot\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)u}\,du$$

Вычислим неопределённый интеграл вида

$$\int\sqrt{1+ax}\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int\sqrt{1+ax}\,d(1+ax) = \frac{1}{a}\cdot\frac{(1+ax)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}+C = \frac{2}{3a}\cdot(1+ax)^{\frac{3}{2}}+C$$

(использован метод подведения под знак дифференциала)

Следовательно

$$\int\limits_L xy\,dl = \frac{a^2b}{2}\cdot\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)u}\,du = \frac{a^2b}{2}\cdot\frac{2}{3\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}\cdot\left(1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{a^4b}{3\cdot\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(\left(1+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right)^{\frac{3}{2}}-(1+0)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{a^4b}{3\cdot\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(\frac{b^3}{a^3}-1\right) = \frac{ab}{3\cdot\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(b^3-a^3\right) =$$

$$= \frac{ab\cdot\left(a^3-b^3\right)}{3\cdot\left(a^2-b^2\right)}$$

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 14:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos(t)\cdot b\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{(a\cdot\sin(t))^2+(b\cdot\cos(t))^2}\,dt\ \Bigg|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume}, a>0\wedge b>0\end{matrix} \rightarrow \frac{a\cdot b\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3\cdot(a+b)}$$

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 13:

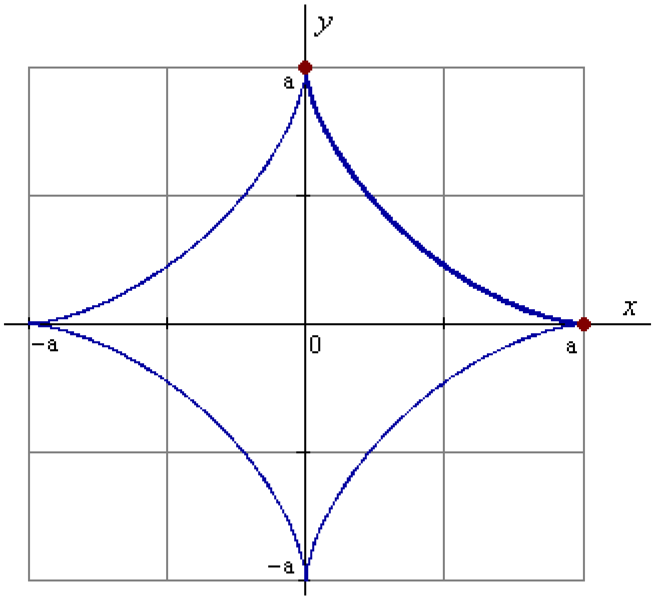
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cdot\cos(t)\cdot b\cdot\sin(t)\cdot\sqrt{(a\cdot\sin(t))^2+(b\cdot\cos(t))^2}\,dt\ \Bigg|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume}, a>0\wedge b>0\end{matrix} \rightarrow \frac{1}{3}\cdot a\cdot b\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

4) Вычислить интеграл

$$\int\limits_L xy\,dl\,,$$

где L - дуга кривой $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ (четверть астроиды в 1-м квадранте).

Имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.



(криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования)

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t);y(t)\big)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2}\,dt$$

В данном случае

$$\int\limits_L xy\,dl = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^3 t\cdot\sin^3 t\cdot\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= a^2\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 t\cdot\sin^3 t\cdot\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 t\cdot\sin^3 t\cdot\cos t\cdot\sin t\cdot\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt =$$

$$= 3a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 t\cdot\sin^4 t\,dt = \frac{3}{16}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4(2t)\,dt = \frac{3}{16}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{3}{64}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t\right)dt = \frac{3}{64}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{64}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right)dt = \frac{3}{128}a^3\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\left(3 - 4\cos 2t + \cos 4t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{128}a^3\cdot\left(3t - 2\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{128}a^3\cdot\left(3\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sin\pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) = \frac{9\pi a^3}{256}$$

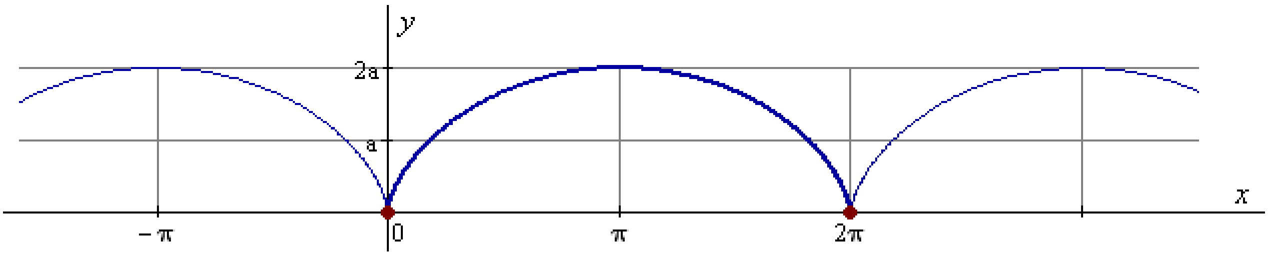
Примечание. Уравнение астроиды в явном виде: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 14:

$$3a^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^4 \cdot \sin(t)^4 \, dt \rightarrow \frac{9 \cdot \pi \cdot a^3}{256}$$

5) Вычислить интеграл $\int\limits_L y\,dl$, где L - первая арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$

Имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.



(заметим, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования)

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt\ , \quad (\alpha < \beta)$$

Следовательно

$$\int\limits_L y\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\ dt =$$

$$= a^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t) \cdot \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\ dt =$$

$$= a^2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t) \cdot \sqrt{2 - 2\cos t}\ dt = a^2\sqrt{2} \cdot \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt$$

Вычислим неопределённый интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int (1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{t}{2}=u \\ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \end{bmatrix} = \int \left(1-\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2du}{(1+u^2)} = 2\cdot\int \frac{(1+u^2-1+u^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}}du =$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\int \frac{u^3du}{(1+u^2)^{\frac{5}{2}}} = \begin{bmatrix} 1+u^2=w^2 \\ u\,du = w\,dw \end{bmatrix} = 4\sqrt{2}\cdot\int \frac{u^3\cdot w\,dw}{w^5\cdot u} = 4\sqrt{2}\cdot\int \frac{u^2dw}{w^4} = 4\sqrt{2}\cdot\int \frac{(w^2-1)dw}{w^4} =$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\int\left(\frac{1}{w^2}-\frac{1}{w^4}\right)dw = 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{w^{-1}}{(-1)}-\frac{w^{-3}}{(-3)}\right)+C = 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{3w^3}-\frac{1}{w}\right)+C =$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{3(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}\right)+C = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\left(\frac{1}{3(1+u^2)}-1\right)+C =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{3\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)}-1\right)+C = 4\sqrt{2}\cdot\cos t\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{t}{2}-1\right)+C$$

и

$$\int_L y\,dl = a^2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos t\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 8a^2\cdot\cos t\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{t}{2}-1\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 8a^2\cdot\left(\cos\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^2\pi-1\right)-\cos 0\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^2 0-1\right)\right) =$$

$$= 8a^2\cdot\left(-1\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)-1\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\right) = \frac{32a^2}{3}$$

Ответ: $\frac{32a^2}{3}$.

Вычисление интеграла в Maple 12:

$$\int_0^{2\pi} a\cdot(1-\cos(t))\cdot\sqrt{a^2\cdot(1-\cos(t))^2+a^2\cdot\sin(t)^2}\,dt$$

$$\frac{32}{3}a^2$$

6) Вычислить $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, где $L: \begin{cases} x = a\cdot(\cos t + t\sin t) \\ y = a\cdot(\sin t - t\cos t) \\ a>0,\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$

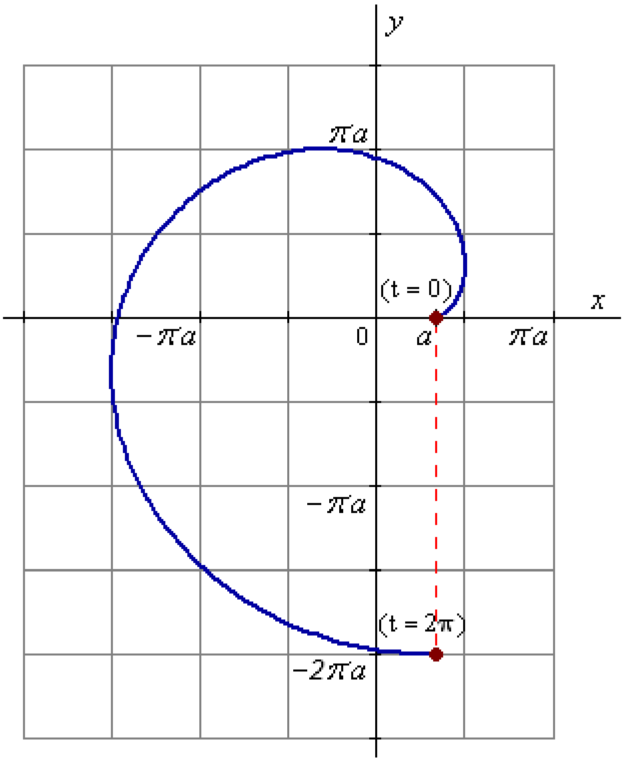
Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла.

Интеграл можно вычислить формально, и рисунок не нужен. Но в Mathcad 14 нет проблем его изобразить, так что посмотрим на линию:

$a := 1 \qquad t := 0, \frac{2\pi}{200} .. 2\pi$

$x(t) := a\cdot(\cos(t) + t\cdot\sin(t))$

$y(t) := a\cdot(\sin(t) - t\cdot\cos(t))$



(заметим, что криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от от направления пути интегрирования)

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} f(x;y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t);y(t)\right)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt$$

В данном случае

$$\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^2\cdot\left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right)\cdot\sqrt{a^2(-\sin t+\sin t+t\cos t)^2 + a^2(\cos t-\cos t+t\sin t)^2}\,dt =$$

$$= a^2\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right)\cdot a\,t\,dt = a^3\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left((\cos t + t\sin t)^2 + (\sin t - t\cos t)^2\right)\cdot t\,dt =$$

$$= a^3\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(1+t^2\right)\cdot t\,dt = a^3\sqrt{2}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\left(t+t^3\right)dt =$$

$$= a^3\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = a^3\cdot\left(\frac{4\pi^2}{2}+\frac{16\pi^4}{4}\right) = 2a^3\pi^2\left(1+2\pi^2\right)$$

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 14:

$$x(t) := a\cdot(\cos(t) + t\cdot\sin(t))$$

$$y(t) := a\cdot(\sin(t) - t\cdot\cos(t))$$

$$\int_0^{2\pi} \left(x(t)^2 + y(t)^2\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}\,dt \;\Bigg|\begin{matrix}\text{simplify}\\ \text{assume}, a > 0\end{matrix} \rightarrow 2\cdot\pi^2\cdot a^3\cdot\left(2\cdot\pi^2 + 1\right)$$

Литература:

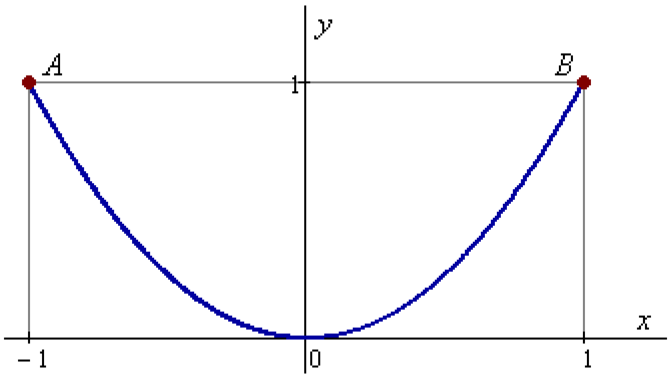
1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2012, стр. 402 (криволинейный интеграл 1-го рода).

Криволинейный интеграл 2-го рода

Криволинейный интеграл по двум координатам

7) Вычислить $\int_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, где L - парабола $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода (криволинейным интегралом по координатам). Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла. Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; обозначим начало линии A, конец линии B.



Для параболы $y = x^2$: $dy = 2x\,dx$, поэтому:

$$\int_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int_{-1}^{1}\left[\left(x^2 - 2x\cdot x^2\right)dx + \left(\left(x^2\right)^2 - 2x\cdot x^2\right)2x\,dx\right] =$$

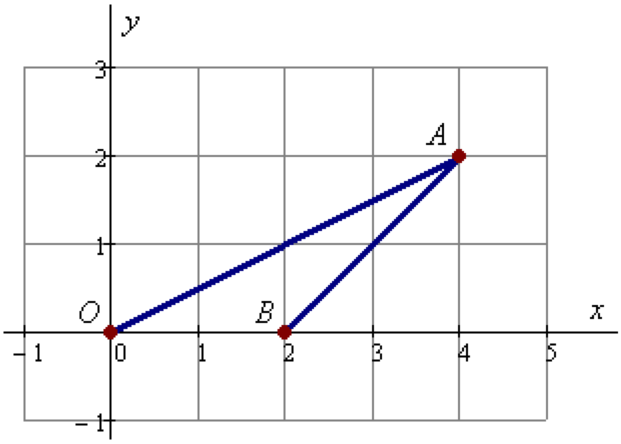
$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^6}{6} - 4\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = -\frac{14}{15}$$

Ответ: $-\dfrac{14}{15}$.

8) Вычислить $\int\limits_{OAB} y\,dx + x\,dy$, где $O(0;0)$, $A(4;2)$, $B(2;0)$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода (криволинейным интегралом по координатам). Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла. Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; здесь начало линии O, конец линии B.



Уравнения прямых: OA: $y = \frac{1}{2}x$,

AB: $y = x - 2$.

1-й способ решения

При явном задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x;\varphi(x)\big) + Q\big(x;\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_c^d \Big(P\big(\varphi(y);y\big)\cdot\varphi'(y) + Q\big(\varphi(y);y\big)\Big)dy$$

По свойству криволинейного интеграла:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy$$

Искомый интеграл:

$$\int\limits_{OAB} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}$$

Следовательно

$$\int\limits_{OAB} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{OA} y\,dx + x\,dy + \int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy =$$

$$= \int\limits_{OA} y\,dx + \int\limits_{OA} x\,dy + \int\limits_{AB} y\,dx + \int\limits_{AB} x\,dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \frac{1}{2}x\,dx + \int\limits_0^2 2y\,dy + \int\limits_4^2 (x-2)\,dx + \int\limits_2^0 (y+2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 + 2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_4^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_2^0 =$$

$$= \frac{4^2}{4} - 0 + 2^2 - 0 + \left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{4^2}{2} - 2\cdot 4\right) + 0 - \left(\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) = 0$$

2-й способ решения

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt$$

Искомый интеграл:

$$\int\limits_{OAB} = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB}$$

Уравнение отрезка OA:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

Уравнение отрезка AB:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \\ 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Следовательно

$$\int\limits_{OAB} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{0}^{2} (t\cdot 2 + 2t\cdot 1)\,dt + \int\limits_{4}^{2} \big((t-2)\cdot 1 + t\cdot 1\big)\,dt =$$

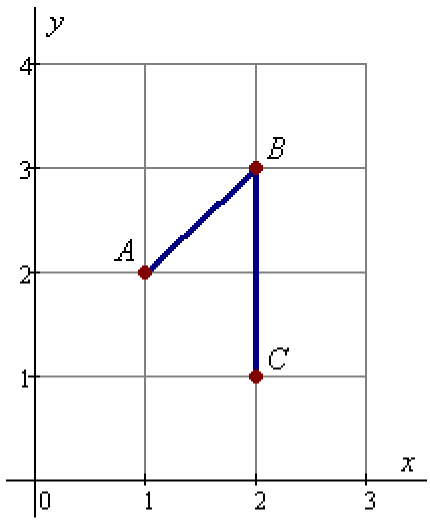
$$= \int\limits_{0}^{2} 4t\,dt + \int\limits_{4}^{2} (2t-2)\,dt = 4\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(2\cdot\frac{t^2}{2} - 2t\right)\Bigg|_4^2 = 2\cdot 2^2 + \left(2^2 - 2\cdot 2\right) - \left(4^2 - 2\cdot 4\right) = 0$$

9) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{ABC} xy\,dx + (y - x)\,dy,$$

где ABC - ломаная $A(1;2)$, $B(2;3)$, $C(2;1)$.

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода (криволинейным интегралом по координатам). Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла. Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; здесь начало линии A, конец линии C.



1-й способ решения

По свойству криволинейного интеграла

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy$$

Искомый интеграл:

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}$$

Следовательно

$$\int\limits_{ABC} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int\limits_{ABC} xy\,dx + \int\limits_{ABC} (y-x)\,dy =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} x\cdot(x+1)\,dx + \int\limits_{2}^{3}\big(y-(y-1)\big)\,dy + \int\limits_{2}^{2} 2\cdot 2\,dx + \int\limits_{3}^{1}(y-2)\,dy =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + y\,\Big|_2^3 + 0 + \frac{(y-2)^2}{2}\Bigg|_3^1 = \left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right) + 3 - 2 + \frac{1}{2}\cdot(1-1) = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$$

2-й способ решения

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt$$

Искомый интеграл:

$$\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}$$

Уравнение отрезка AB:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Уравнение отрезка BC:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

Следовательно

$$\int\limits_{ABC} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int\limits_{1}^{2}\big(t\cdot(t+1)\cdot 1 + (t+1-t)\cdot 1\big)\,dt + \int\limits_{3}^{1}\big(2t\cdot 0 + (t-2)\cdot 1\big)\,dt =$$

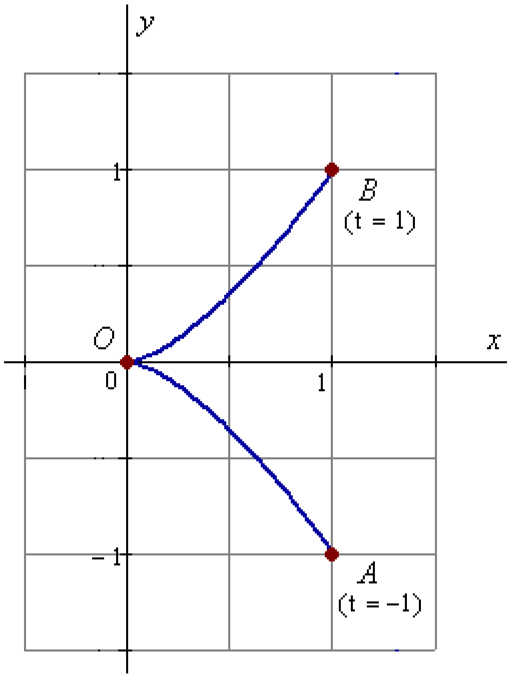
$$= \int\limits_{1}^{2}\left(t^2+t+1\right)dt + \int\limits_{3}^{1}(t-2)\,dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{t^2}{2}-2t\right)\Bigg|_3^1 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right) - \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right) + \left(\frac{1^2}{2}-2\right) - \left(\frac{3^2}{2}-2\cdot 3\right) = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$$

10) Вычислить интеграл $\int\limits_L y^2dx+2xy\,dy$ вдоль кривой L: $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \\ -1\le t\le 1 \end{cases}$

Здесь имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода (криволинейным интегралом по координатам). Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода может быть сведено к вычислению определённого интеграла. Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; обозначим начало линии A, конец линии B.



1-й способ решения

По свойству криволинейного интеграла

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{AB} P(x;y)dx+\int\limits_{AB} Q(x;y)dy$$

Искомый интеграл:

$$\int\limits_{AOB}=\int\limits_{AO}+\int\limits_{OB}$$

Данная линия задаётся явным образом как $x=y^{\frac{2}{3}}$ (или $|y|=x^{\frac{3}{2}}$).

Следовательно

$$\int\limits_{AOB} y^2dx+2xy\,dy=\int\limits_{AO} y^2dx+2xy\,dy+\int\limits_{OB} y^2dx+2xy\,dy=$$

$$=\int\limits_{AO} y^2dx+\int\limits_{AO} 2xy\,dy+\int\limits_{OB} y^2dx+\int\limits_{OB} 2xy\,dy=$$

$$=\cancel{\int\limits_1^0\left(-x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx}+2\cdot\int\limits_{-1}^0 y^{\frac{5}{3}}dy+\cancel{\int\limits_0^1\left(-x^{\frac{3}{2}}\right)^2 dx}+2\cdot\int\limits_0^1 y^{\frac{5}{3}}dy=$$

$$=2\cdot\int\limits_{-1}^1 y^{\frac{5}{3}}dy=2\cdot\left.\frac{y^{\frac{8}{3}}}{\left(\frac{8}{3}\right)}\right|_{-1}^{1}=\frac{3}{4}\cdot(1-1)=0$$

2-й способ решения

При параметрическом задании кривой интегрирования

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} \Big(P\big(x(t);y(t)\big)\cdot x'(t) + Q\big(x(t);y(t)\big)\cdot y'(t) \Big) dt$$

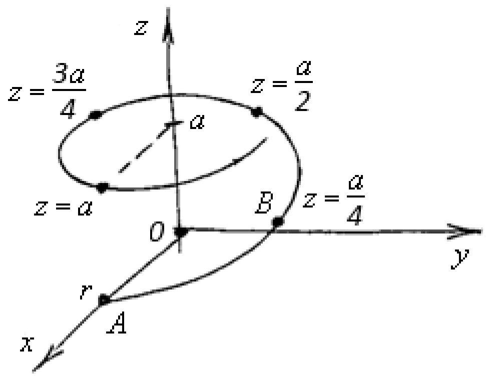
Следовательно

$$\int_{AB} y^2 dx + 2xy\,dy = \int_{-1}^{1} \left(t^6 \cdot 2t + 2t^5 \cdot 3t^2 \right) dt = 8 \cdot \int_{-1}^{1} t^7 dt = 8 \cdot \frac{t^8}{8} \Bigg|_{-1}^{1} = 1 - 1 = 0$$

Криволинейный интеграл по трём координатам

11) Вычислить $\int_L xz\,dy - yz\,dx + x^2\,dz$, где $L: \begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \\ z = \dfrac{a \cdot t}{2\pi} \end{cases}$, от $z = 0$ до $z = \dfrac{a}{4}$.

Дан криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл 2-го рода). Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; обозначим начало линии A, конец линии B. Линия L является спиральной линией, ориентированной по оси Oz, с шагом a и радиусом r.



Используем формулу

$$\int_L P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big[P\big(x(t);\ y(t);\ z(t)\big)\cdot x'_t(t) + Q\big(x(t);\ y(t);\ z(t)\big)\cdot y'_t(t) + R\big(x(t);\ y(t);\ z(t)\big)\cdot z'_t(t) \Big] dt$$

Один виток по спирали совершается при $0 \le t \le 2\pi$, при этом $0 \le z \le a$; следовательно интервалу $0 \le z \le \dfrac{a}{4}$ соответствует четверть витка по спирали и интервал $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Здесь

$$x'_t = -r \cdot \sin t$$

$$y'_t = r \cdot \cos t$$

$$z'_t = \frac{a}{2\pi}$$

и

$$\int_L xz\,dy - yz\,dx + x^2\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[r\cos t \cdot \frac{at}{2\pi} \cdot r\cos t - r\sin t \cdot \frac{at}{2\pi} \cdot (-r\sin t) + r^2 \cos^2 t \cdot \frac{a}{2\pi} \right] dt =$$

$$= \frac{a}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[t \cdot r^2 \cdot \cos^2 t + t \cdot r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t \right] dt = \frac{a}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[t \cdot r^2 + r^2 \cdot \cos^2 t \right] dt =$$

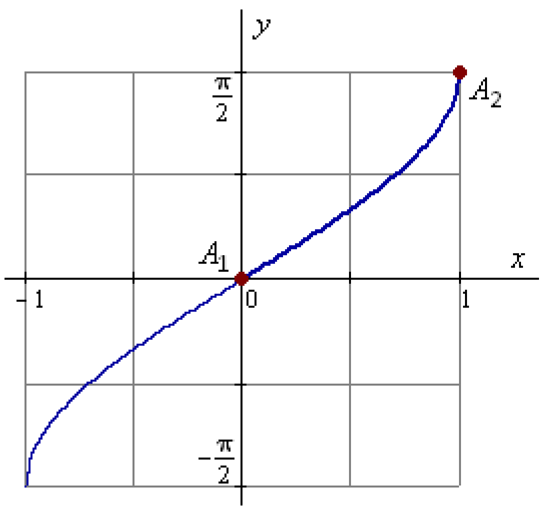
$$= \frac{a \cdot r^2}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[t + \cos^2 t \right] dt = \frac{a \cdot r^2}{2\pi} \cdot \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2t) \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a \cdot r^2}{8} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \left[\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \int dt + \frac{1}{4} \cdot \int \cos 2t\,d(2t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t$$

Криволинейный интеграл по одной координате

12) Вычислить $\int_L xy\,dy$ по дуге $y = \arcsin x$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

Имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода по координате y. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода можно свести к вычислению определённого интеграла. Результат интегрирования зависит от направления интегрирования; обозначим начало линии A_1, конец линии A_2.



При явном представлении кривой интегрирования:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P\big(x;\varphi(x)\big) + Q\big(x;\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) \Big)\,dx =$$

$$= \int\limits_c^d \Big(P\big(\varphi(y);y\big)\cdot\varphi'(y) + Q\big(\varphi(y);y\big) \Big)\,dy$$

В данном частном случае

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)\,dy = \int\limits_a^b Q\big(x;\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int\limits_c^d Q\big(y;\varphi(y)\big)\,dy$$

Вычисляем:

$$\int\limits_L xy\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} y\cdot\sin y\,dy = \begin{bmatrix} u = y \\ du = dy \\ dv = \sin y\,dy \\ v = -\cos y \end{bmatrix} = -y\cdot\cos y\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos y\,dy = 0 - 0 + \sin y\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 14:

$$\int x\cdot\sin(x)\,dx \to \sin(x) - x\cdot\cos(x) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cdot\sin(y)\,dy \to 1$$

13) Вычислить интеграл

$$\int\limits_L xy\,dy\,,$$

где L - дуга кривой $x = y - \frac{1}{3}y^3$ от $A\left(\frac{2}{3};-2\right)$ до $B\left(-\frac{2}{3};2\right)$.

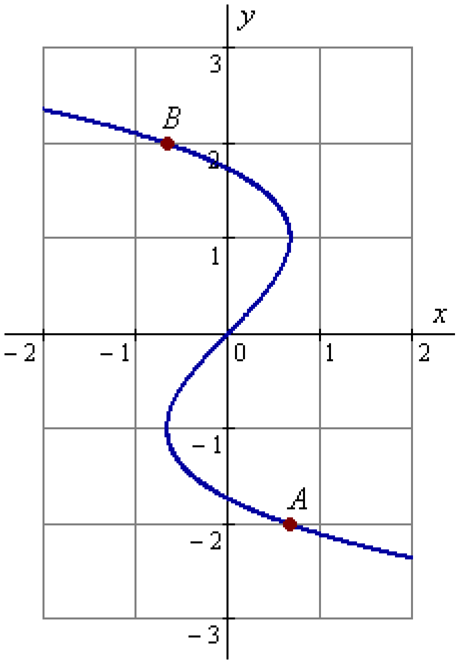
Имеем дело с криволинейным интегралом 2-го рода по координате y. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода можно свести к вычислению определённого интеграла.

При явном представлении кривой интегрирования:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(P\big(x;\varphi(x)\big) + Q\big(x;\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) \Big)\,dx =$$

$$= \int\limits_c^d \Big(P\big(\varphi(y);y\big)\cdot\varphi'(y) + Q\big(\varphi(y);y\big) \Big)\,dy$$



В данном частном случае

$$\int_{AB} Q(x;y)\,dy = \int_c^d Q(y;\varphi(y))\,dy$$

Вычисляем:

$$\int_L xy\,dy = \int_{-2}^{2}\left(y - \frac{1}{3}y^3\right)\cdot y\,dy = \int_{-2}^{2}\left(y^2 - \frac{1}{3}y^4\right)dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5}{5}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5}{5}\right) = 2\cdot\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^5}{5}\right) = \frac{2\cdot 2^3}{3}\cdot\left(1 - \frac{2^2}{5}\right) = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

Вычисление определённого интеграла в Mathcad 14:

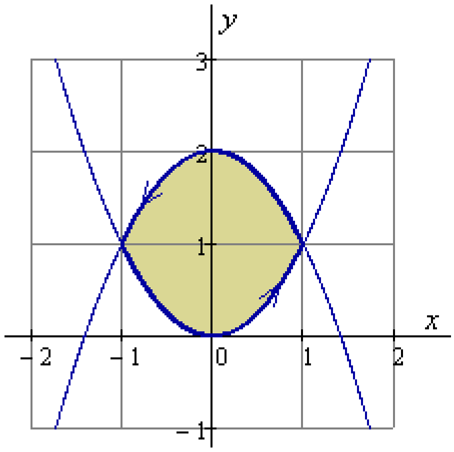
$$\int_{-2}^{2}\left(y - \frac{1}{3}y^3\right)y\,dy \rightarrow \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

Криволинейный интеграл по замкнутой кривой

14) Преобразовать криволинейный интеграл в двойной и вычислить его (по формуле Грина)

$\oint_C \left(x^2 - 2xy + 2\right)dx + \left(y^3 - x\right)dy$, где C: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$.

- криволинейный интеграл по замкнутой кривой.



Если замкнутая кривая L ограничивает на плоскости область D, в точках которой функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные, то верна формула Грина (Остроградского-Грина)

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Здесь через $\oint_L P dx + Q dy$ обозначается криволинейный интеграл 2-го рода по замкнутой кривой, причём направление интегрирования предполагается положительным, т.е. против хода часовой стрелки.

Здесь

$$P(x;y) = x^2 - 2xy + 2$$

$$Q(x;y) = y^3 - x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x$$

и

$$\oint_C \left(x^2 - 2xy + 2\right)dx + \left(y^3 - x\right)dy = \iint_D (-1+2x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} (-1+2x)\,dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-1+2x)\left(2-2x^2\right)dx = 2\cdot \int_{-1}^{1} (-1+2x)\left(1-x^2\right)dx = 2\cdot \int_{-1}^{1} \left(-2x^3 + x^2 + 2x - 1\right)dx =$$

$$= 2\cdot\left(-2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\cdot\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - x\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\cdot\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 - 1\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + 1\right)\right) = -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$$

Вычисление интеграла в Mathcad 14:

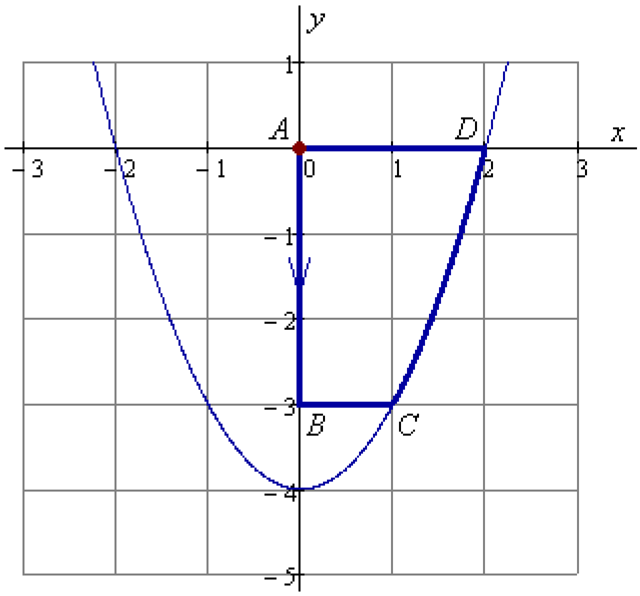
$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{2-x^2} (-1 + 2x)\, dy\, dx \rightarrow -\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$$

15) Вычислить интеграл по замкнутому контуру L:

$$\oint\limits_L (y+4)\,dx + e^{3x}dy$$

$$L:\ \begin{aligned} &y = x^2 - 4 \\ &y = -3 \\ &x = 0 \quad (x \ge 0) \end{aligned}$$

Изобразим контур L:



Положительным направлением обхода считается обход против часовой стрелки.

1-й способ решения

Используем при вычислении криволинейного интеграла формулы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \left[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

и

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$$

и свойство криволинейного интеграла

$$\oint\limits_{CnAmC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC}$$

В данном случае

$$P(x,y) = y+4$$

$$Q(x,y) = e^{3x}$$

Рассмотрим данный интеграл как сумму интегралов по отдельным отрезкам:

$$\oint\limits_L (y+4)\,dx + e^{3x}dy =$$

$$= \int\limits_{AB} (y+4)\,dx + e^{3x}dy + \int\limits_{BC} (y+4)\,dx + e^{3x}dy + \int\limits_{CD} (y+4)\,dx + e^{3x}dy + \int\limits_{DA} (y+4)\,dx + e^{3x}dy$$

Здесь

AB - график функции $x=0$ (а значит и $dx=0$), y меняется от 0 до -3;

BC - график функции $y=-3$ (а значит и $dy=0$), x меняется от 0 до 1;

CD - график функции $y=x^2-4$ ($dy=2x\,dx$), x меняется от 1 до 2;

DA - график функции $y=0$ (а значит и $dy=0$), x меняется от 2 до 0.

$$\oint\limits_L (y+4)\,dx+e^{3x}dy=$$

$$=\int\limits_0^{-3} e^{3\cdot 0}dy+\int\limits_0^1(-3+4)\,dx+\int\limits_1^2\left(\left(x^2-4\right)+4+e^{3x}\cdot 2x\right)dx+\int\limits_2^0(0+4)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{-3} dy+\int\limits_0^1 dx+\int\limits_1^2 x^2dx+2\cdot\int\limits_1^2 x\cdot e^{3x}dx+4\cdot\int\limits_2^0 dx=$$

$$=(-3-0)+(1-0)+\frac{1}{3}\cdot\left(2^3-1^3\right)+2\cdot\frac{e^{3x}}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\Bigg|_1^2+4\cdot(0-2)=$$

$$=-3+1+\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(e^6\left(2-\frac{1}{3}\right)-e^3\left(1-\frac{1}{3}\right)\right)-8=$$

$$=-10+\frac{7}{3}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}e^6-\frac{2}{3}e^3\right)=$$

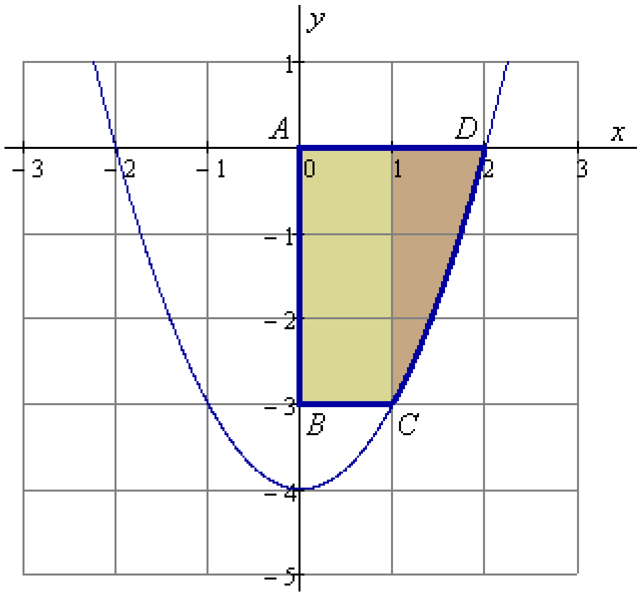
$$=\frac{2e^3}{9}\cdot\left(5e^3-2\right)-\frac{23}{3}$$

Ответ: $\frac{2e^3}{9}\cdot\left(5e^3-2\right)-\frac{23}{3}$

2-й способ решения

Используем формулу Грина (Остроградского-Грина)

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$



В данной задаче

$$P(x,y)=y+4 \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=1$$

$$Q(x,y)=e^{3x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=3e^{3x}$$

Вычисляем (разобьём область на две части - прямоугольник и криволинейный треугольник):

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-3}^0\left(3e^{3x}-1\right)dy+\int_1^2 dx\int_{x^2-4}^0\left(3e^{3x}-1\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(9e^{3x}-3\right)dx+\int_1^2\left(3e^{3x}-1\right)\left(x^2-4\right)dx=\ \dots\ =\frac{2e^3}{9}\cdot\left(5e^3-2\right)-\frac{23}{3}$$

Ответ: $\frac{2e^3}{9}\cdot\left(5e^3-2\right)-\frac{23}{3}$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 407 (криволинейный интеграл 2-го рода).