1) Примеры вычисления интегралов, содержащих модуль:

$$\int |x|\,dx \qquad \int \frac{|x|}{x}dx \qquad \int \frac{dx}{|x|} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

Определение функции знака:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Определение функции модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \ge 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad \text{или } |x| = \sqrt{x^2}$$

Функция знака некоторого аргумента и функция модуля того же аргумента имеют связь через сам аргумент:

$$|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$$

или

$$x = |x| \cdot \operatorname{sign}(x)$$

Кроме того

$$\operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sign}(x) = 1, \quad x \ne 0$$

Функцию знака при необходимости можно вновь представить через элементарные функции:

$$\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad x \ne 0$$

Между прочим, в Mathcad'е даётся третье определение функции знака:

$$\operatorname{signum}(z) = \begin{cases} 1 & \text{, если } z = 0 \\ \dfrac{z}{|z|} & \text{, если } z \ne 0 \end{cases}$$

$$\int |x|\,dx$$

$$\int |x|\,dx = \int x \cdot \operatorname{sign}(x)\,dx = \operatorname{sign}(x) \cdot \int x\,dx = \operatorname{sign}(x) \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x \cdot |x|}{2} + C\,.$$

► В операциях интегрирования и дифференцирования с функцией $\operatorname{sign}(x)$ можно оперировать как с константой.

$$\int \frac{|x|}{x}dx$$

$$\int \frac{|x|}{x}dx = \int \frac{\cancel{x} \cdot \operatorname{sign}(x)}{\cancel{x}}dx = \int \operatorname{sign}(x)\,dx = \operatorname{sign}(x) \cdot \int dx = \operatorname{sign}(x) \cdot x + C = |x| + C$$

$$\int \frac{dx}{|x|}$$

$$\int \frac{dx}{|x|} = \operatorname{sign}(x)\cdot\int\frac{dx}{x} = \operatorname{sign}(x)\cdot\ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int \frac{\operatorname{sign}(x)\cdot d(\operatorname{sign}(x)\cdot x)}{\sqrt{|x|}} = \operatorname{sign}(x)\cdot\int (|x|)^{-\frac{1}{2}}\, d(|x|) = \operatorname{sign}(x)\cdot\frac{(|x|)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{|x|} = \frac{2x}{\sqrt{|x|}} + C$$

(здесь использовано тождество $\operatorname{sign}(x)\cdot\operatorname{sign}(x) = 1,\quad x \neq 0$)

$$\int x^2\sqrt{|x|}\,dx = \begin{bmatrix} \sqrt{|x|} = t \\ \dfrac{\operatorname{sign} x\, dx}{2\sqrt{|x|}} = dt \end{bmatrix} = 2\operatorname{sign} x\cdot\int t^6 dt = 2\operatorname{sign} x\cdot\frac{t^7}{7} + C = \frac{2}{7}\operatorname{sign} x\cdot\left(\sqrt{|x|}\right)^7 = \frac{2}{7}x^3\sqrt{|x|} + C$$

2) Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\int\left(3x - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} + 3\right)^2 dx$;

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{3x - x^2}}$;

в) $\displaystyle\int\frac{6 - 6x + x^6}{12\sqrt{x^6}}dx$.

а)

$$\int\left(3x - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} + 3\right)^2 dx = \int\left(9x^2 + 18x + 9 + \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{6x}{\sqrt[4]{x^2}} - \frac{6}{\sqrt[4]{x^2}}\right)dx =$$

$$= \int\left(9x^2 + 18x + 9 + \frac{1}{|x|} - \frac{6x}{\sqrt{|x|}} - \frac{6}{\sqrt{|x|}}\right)dx =$$

$$= 9\cdot\frac{x^3}{3} + 18\cdot\frac{x^2}{2} + 9x + \frac{x}{|x|}\cdot\ln|x| - 6\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{|x|^3} - 6\cdot\frac{2x}{\sqrt{|x|}} + C =$$

$$=3x^3+9x^2+9x+\frac{x}{|x|}\cdot\ln|x|-4\cdot\sqrt{|x|^3}-\frac{12x}{\sqrt{|x|}}+C=$$

$$=3x\cdot\left(x^2+3x+3\right)+\frac{x}{|x|}\cdot\left(\ln|x|-4\cdot(x+3)\cdot\sqrt{|x|}\right)+C$$

Покажем вычисление отдельных интегралов. В операциях интегрирования и дифференцирования с функцией $\operatorname{sign}(x)$ будем оперировать как с константой; также примем во внимание, что

$$|x|=x\cdot\operatorname{sign}(x)$$
$$\operatorname{sign}(x)\cdot\operatorname{sign}(x)=1 \quad (x\neq 0)$$

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{|x|}=\operatorname{sign}(x)\cdot\int\frac{dx}{x}=\operatorname{sign}(x)\cdot\ln|x|=\frac{x}{|x|}\cdot\ln|x|$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{|x|}}=\int\frac{\operatorname{sign}(x)\,d(\operatorname{sign}(x)\cdot x)}{\sqrt{|x|}}=\operatorname{sign}(x)\cdot\int\frac{d(|x|)}{(|x|)^{\frac{1}{2}}}=\operatorname{sign}(x)\cdot\frac{(|x|)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{|x|}=\frac{2x}{\sqrt{|x|}}$

3) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{|x|}}=\int\frac{\operatorname{sign}(x)\cdot|x|\,dx}{\sqrt{|x|}}=\int(|x|)^{\frac{1}{2}}\,d(\operatorname{sign}(x)\cdot x)=\int(|x|)^{\frac{1}{2}}\,d(|x|)=\frac{(|x|)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{|x|^3}$

б)

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{3x-x^2}}=\int\frac{dx}{x\cdot|x|\cdot\sqrt{\frac{3}{x}-1}}=\operatorname{sign}(x)\cdot\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{\frac{3}{x}-1}}=\operatorname{sign}(x)\cdot\int x^{-2}\cdot\left(-1+3\cdot x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{x}-1=t^2\\ 3\cdot(-1)x^{-2}dx=2t\,dt\\ dx=-\frac{2}{3}x^2t\,dt\end{array}\right]=\operatorname{sign}(x)\cdot\int\frac{-\frac{2}{3}x^2t\,dt}{x^2t}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\int dt=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot t+C=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{|x|}\cdot\sqrt{\frac{3}{x}-1}+C=-\frac{2}{3}\cdot\frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{\frac{3}{x}-1}+C=-\frac{2}{3x}\cdot\sqrt{x^2\cdot\left(\frac{3}{x}-1\right)}+C=-\frac{2}{3x}\cdot\sqrt{3x-x^2}+C$$

- замену $\frac{3}{x}-1=t^2$ можно сгенерировать формально, рассмотрев интеграл от дифференциального бинома.

в)

$$\int\frac{6-6x+x^6}{12\sqrt{x^6}}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{|x^3|}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{x\,dx}{|x^3|}+\frac{1}{12}\cdot\int\frac{x^6dx}{|x^3|}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{\operatorname{sign}x\cdot x^3}-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sign}x\cdot x^3}+\frac{1}{12}\cdot\int\frac{x^6dx}{\operatorname{sign}x\cdot x^3}=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sign}x}\cdot\int\frac{dx}{x^3}-\frac{1}{2\operatorname{sign}x}\cdot\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{12\operatorname{sign}x}\cdot\int x^2dx=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sign}x}\cdot\frac{x^{-2}}{(-2)}-\frac{1}{2\operatorname{sign}x}\cdot\frac{x^{-1}}{(-1)}+\frac{1}{12\operatorname{sign}x}\cdot\frac{x^3}{3}+C=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{sign}x}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\operatorname{sign}x}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{36\operatorname{sign}x}\cdot x^3+C=$$

$$=-\frac{1}{4\cdot|x|\cdot x}+\frac{1}{2\cdot|x|}+\frac{|x^3|}{36}+C=$$

$$=-\frac{1}{4x\cdot\sqrt{x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^6}}{36}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot\left(1-\frac{1}{2x}\right)+\frac{\sqrt{x^6}}{36}+C$$