1) Найти среднее значение функции $f(x)=3^x-2x+3$ на отрезке от 0 до 2 включительно.

Теорема о среднем значении (теорема о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$,

то найдётся такая точка $\xi\in[a,b]$, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\cdot(b-a),$$

называемое формулой среднего значения.

Величина $f(\xi)=\dfrac{1}{(b-a)}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Среднее значение функции $f(x)=3^x-2x+3$ на отрезке $[0;2]$:

$$f(\xi)=\frac{1}{(2-0)}\cdot\int_0^2\left(3^x-2x+3\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3^x}{\ln 3}-x^2+3x\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{3^2}{\ln 3}-2^2+3\cdot 2\right)-\left(\frac{3^0}{\ln 3}-0^2+3\cdot 0\right)\right]=1+\frac{4}{\ln 3}\approx 4{,}64$$

2) Оценить интеграл $\int_1^3 e^{x^2-x}dx$.

Следствие теоремы о среднем.

Оценка интеграла: если $m\le f(x)\le M$ на $[a,b]$, то

$$m\cdot(b-a)<\int_a^b f(x)\,dx<M\cdot(b-a).$$

Здесь $a=1$, $b=3$.

На отезке $[1;3]$ функция $f(x)=e^{x^2-x}$ монотонно возрастает (при увеличении $x>1$ аргумент $\left(x^2-x\right)$ показательной функции с основанием $e>1$ растёт). Следовательно:

$$m=f(1)=e^{1^2-1}=1$$

$$M=f(3)=e^{3^2-3}=e^6$$

и

$$1\cdot(3-1)<\int_1^3 e^{x^2-x}dx<e^6\cdot(3-1)$$

$$2<\int_1^3 e^{x^2-x}dx<2e^6$$

или приближённо:

$$2<\int_1^3 e^{x^2-x}dx<807$$

3) Произвести оценку интеграла $\int_1^9 \frac{x\,dx}{(9+7x)^2}$ с помощью теоремы о среднем.

Следствие теоремы о среднем.

Оценка интеграла: если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то

$$m \cdot (b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M \cdot (b-a).$$

Здесь $a=1$, $b=9$.

На отезке $[1;9]$ функция $f(x)=\frac{x}{(9+7x)^2}$ монотонно убывает (при увеличении $x>1$ знаменатель дроби растёт быстрее, чем числитель). Следовательно:

$$M = f(1) = \frac{1}{(9+7)^2} = \frac{1}{256}$$

$$m = f(9) = \frac{9}{(9+63)^2} = \frac{1}{576}$$

и

$$\frac{1}{576}\cdot(9-1) < \int_1^9 \frac{x\,dx}{(9+7x)^2} < \frac{1}{256}\cdot(9-1)$$

$$\frac{8}{576} < \int_1^9 \frac{x\,dx}{(9+7x)^2} < \frac{8}{256}$$

$$\frac{1}{72} < \int_1^9 \frac{x\,dx}{(9+7x)^2} < \frac{1}{32}$$

или приближённо:

$$0{,}014 < \int_1^9 \frac{x\,dx}{(9+7x)^2} < 0{,}031$$

Литература:

1) Кремер Н.Ш. “Высшая математика для экономических специальностей”, 2006, стр. 582 (теорема о среднем);

2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. 'Высшая математика в упражнениях и задачах", часть1, 2003, стр. 244 (оценка определённого интеграла);

3) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", 2001, стр. 150.