Метод Остроградского представляет собой разновидность метода неопределённых коэффициентов. Он эффективен в том случае, когда знаменатель рациональной функции имеет кратные корни.

Покажем на примерах начало работы по методу Остроградского:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2}+\int\left(\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+1}\right)dx$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов полученное равенство дифференцируем. Получив значения неопределённых коэффициентов, вычисляем второй интеграл. Поскольку во втором интеграле стоит более простая рациональная функция, чем в исходном интеграле, то его вычислить проще.

Литература:

1) Орловский Д.Г. "Неопределённый интеграл", 2006, стр. 149 (метод Остроградского).

1) Вычислить интеграл:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}dx$$

Разложим правильную рациональную алгебраическую дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-2)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{x^4\cdot(A+B)+x^3\cdot(-2B+C)+x^2\cdot(2A+B-2C+D)+x\cdot(-2B+C-2D+E)+(A-2C-2E)}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-2B+C=0\\2A+B-2C+D=2\\-2B+C-2D+E=2\\A-2C-2E=13\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-2\\D=-3\\E=-4\end{cases}$$

Следовательно

$$\boldsymbol{I}=\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2+1}-\int\frac{(3x+4)\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-2\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}-3\cdot\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}-4\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Последний интеграл вычислим, применяя метод Остроградского:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

дифференцируем и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A\left(x^2+1\right)-(Ax+B)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^3\cdot C+x^2\cdot(-A+D)+x\cdot(-2B+C)+(A+D)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\begin{cases}C=0\\-A+D=0\\-2B+C=0\\A+D=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=1/2\\B=0\\C=0\\D=1/2\end{cases}$$

откуда получаем

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\left(\frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x+C$$

и окончательно

$$\boldsymbol{I}=\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-2\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}-3\cdot\int\frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}-4\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-2\operatorname{arctg}x-\frac{3}{2}\cdot\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-4\cdot\left(\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x\right)=$$

$$=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)-2\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}-2\operatorname{arctg}x+C=$$

$$=\ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}-4\operatorname{arctg}x+\frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)}+C$$

Вычисление интеграла в Maxima 5:

```
integrate((2*x^2+2*x+13)/((x-2)*(x^2+1)^2), x);
```

$$-\frac{\log\left(x^2+1\right)}{2}-4\,\mathrm{atan}(x)+\log(x-2)-\frac{4\,x-3}{2\,x^2+2}$$

Вычисление интеграла в Maple 13:

$$\int\frac{2\cdot x^2+2\cdot x+13}{(x-2)\cdot\left(x^2+1\right)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{-8\,x+6}{x^2+1}-4\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln(x-2)$$

Вычисление интеграла в Math Studio 5:

```
Integrate((2x^2+2x+13)/((x-2)*(x^2+1)^2))
```

$$-4\,\mathrm{atan}(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{2\,x}{-x^2-1}+\ln(x-2)$$