Условия Коши-Римана.

1) Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $w = e^{z+\pi i}$.

Функция, имеющая производную в точке z, называется дифференцируемой в этой точке.

Условия Коши - Римана (Даламбера - Эйлера, Эйлера - Даламбера):
Если $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Запишем данную функцию в алгебраической форме, полагая $z = x + iy$:

$$w = e^{z+\pi i} = e^{x+iy+\pi i} = e^{x+i(y+\pi)} = e^{x} \cdot e^{i(y+\pi)} = e^{x} \cdot \left(\cos(y+\pi) + i \cdot \sin(y+\pi)\right) =$$

$$= e^{x} \cdot (-\cos y - i \cdot \sin y) = -e^{x} \cos y - i \cdot e^{x} \sin y$$

Выделим действительную (u) и мнимую (v) части функции w:

$$u(x, y) = -e^{x} \cos y$$

$$v(x, y) = -e^{x} \sin y$$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(-e^{x} \cos y\right)'_x = -e^{x} \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(-e^{x} \sin y\right)'_y = -e^{x} \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-e^{x} \cos y\right)'_y = e^{x} \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(-e^{x} \sin y\right)'_x = -e^{x} \sin y$$

- условия Коши-Римана выполняются.

Литература:
1) Гусак А.А. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 59 (пример 9), стр. 20 (пример 2);
2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 530, стр. 532...535 (условия Эйлера-Даламбера, аналитичность функции).

2) Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $w = z^2 - 4i \cdot z + 12$.

Запишем данную функцию в алгебраической форме, полагая $z = x + iy$:

$$w = (x+iy)^2 - 4i \cdot (x+iy) + 12 = x^2 + 2xy \cdot i - y^2 - 4x \cdot i + 4y + 12 =$$

$$= \left(x^2 - y^2 + 4y + 12\right) + (2xy - 4x) \cdot i$$

Выделим действительную (u) и мнимую (v) части функции w:

$$u(x,y)=x^2-y^2-4y+12$$
$$v(x,y)=2xy-4x$$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2-y^2+4y+12\right)'_x=2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=(2xy-4x)'_y=2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2-y^2+4y+12\right)'_y=-2y+4$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=(2xy-4x)'_x=2y-4$$

- условия Коши-Римана выполняются.

3) Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $\omega=\sin(iz-1)$.

Выразим тригонометрическую функцию $\sin z$ через показательную:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

и примем во внимание, что $z=x+iy$:

$$\omega=\sin(iz-1)=\frac{e^{i(ix-y-1)}-e^{-i(ix-y-1)}}{2i}=\frac{e^{-x-iy-i}-e^{x+iy+i}}{2i}=\frac{e^{-x}\cdot e^{-i(y+1)}-e^{x}\cdot e^{i(y+1)}}{2e^{\frac{\pi}{2}i}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}\cdot e^{i\left(-y-1-\frac{\pi}{2}\right)}-e^{x}\cdot e^{i\left(y+1-\frac{\pi}{2}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}\cdot\left(\cos\left(-y-1-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(-y-1-\frac{\pi}{2}\right)\right)-e^{x}\cdot\left(\cos\left(y+1-\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(y+1-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}\cdot(\sin(-y-1)-i\cdot\cos(-y-1))-e^{x}\cdot(\sin(y+1)-i\cdot\cos(y+1))\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-x}\cdot(-\sin(y+1)-i\cdot\cos(y+1))-e^{x}\cdot(\sin(y+1)-i\cdot\cos(y+1))\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(-e^{-x}\sin(y+1)-i\cdot e^{-x}\cos(y+1)-e^{x}\sin(y+1)+i\cdot e^{x}\cos(y+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin(y+1)\cdot\left(-e^{-x}-e^{x}\right)+i\cdot\cos(y+1)\cdot\left(-e^{-x}+e^{x}\right)\right)$$

Действительная и мнимая части числа $\omega=u+iv$:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\sin(y+1)\cdot\left(-e^{-x}-e^{x}\right)$$
$$v(x,y)=\frac{1}{2}\cos(y+1)\cdot\left(-e^{-x}+e^{x}\right)$$

Вычисляем частные производные:

$$2\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\sin(y+1)\cdot\left(-e^{-x}-e^{x}\right)\right)'_x=\sin(y+1)\cdot\left(e^{-x}-e^{x}\right)$$

$$2\frac{\partial v}{\partial y}=\left(\cos(y+1)\cdot\left(-e^{-x}+e^{x}\right)\right)'_y=-\sin(y+1)\cdot\left(-e^{-x}+e^{x}\right)=\sin(y+1)\cdot\left(e^{-x}-e^{x}\right)$$

и

$$2\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\sin(y+1)\cdot\left(-e^{-x}-e^{x}\right)\right)'_y=\cos(y+1)\cdot\left(-e^{-x}-e^{x}\right)$$

$$2\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\cos(y+1)\cdot\left(-e^{-x}+e^{x}\right)\right)'_x=\cos(y+1)\cdot\left(e^{-x}+e^{x}\right)$$

Как видим, условия Коши-Римана

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

для функции $\omega=\sin(iz-1)$ выполняются.

4) Пользуясь условиями Коши-Римана, проверить, будет ли аналитической функция $w=f(z)$:

$w=\sin 2z+3z$.

Функция $w=f(z)$ называется аналитической в точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой её окрестности.

Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется аналитической функцией в этой области.

Условия Коши - Римана (Даламбера - Эйлера, Эйлера - Даламбера):

Если $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Запишем данную функцию в алгебраической форме, полагая $z=x+iy$:

$$w=\sin(2x+i\cdot 2y)+3\cdot(x+iy)=$$

$$=\frac{e^{i(2x+i2y)}-e^{-i(2x+i2y)}}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{e^{-2y+i2x}-e^{2y-i2x}}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{e^{-2y}\cdot e^{i2x}-e^{2y}\cdot e^{-i2x}}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{e^{-2y}\cdot(\cos 2x+i\sin 2x)-e^{2y}\cdot(\cos(-2x)+i\sin(-2x))}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{e^{-2y}\cdot\cos 2x+i\cdot e^{-2y}\cdot\sin 2x-e^{2y}\cdot\cos 2x+i\cdot e^{2y}\cdot\sin 2x}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{\left(e^{-2y}-e^{2y}\right)\cdot\cos 2x+i\cdot\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)\cdot\sin 2x}{2i}+3x+i3y=$$

$$=\frac{i\cdot\left(e^{-2y}-e^{2y}\right)\cdot\cos 2x-\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)\cdot\sin 2x}{-2}+3x+i3y=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)\cdot\sin 2x-i\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-2y}-e^{2y}\right)\cdot\cos 2x+3x+i3y=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-2y}+e^{2y}\right)\cdot\sin 2x+3x\right)+i\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(e^{2y}-e^{-2y}\right)\cdot\cos 2x+3y\right)=$$

$$=\left(\operatorname{ch}(2y)\cdot\sin(2x)+3x\right)+i\cdot\left(\operatorname{sh}(2y)\cdot\cos 2x+3y\right)$$

Формулы, использованные в преобразованиях:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad z\in C$$

$$\operatorname{sh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2},\qquad x\in R$$

$$\operatorname{ch}(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\qquad x\in R$$

Выделим действительную и мнимую части $w(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$:

$$u(x,y)=\operatorname{ch}(2y)\cdot\sin(2x)+3x$$

$$v(x,y)=\operatorname{sh}(2y)\cdot\cos 2x+3y$$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\operatorname{ch}(2y)\cdot\sin(2x)+3x\right)'_x=2\cdot\operatorname{ch}(2y)\cdot\cos(2x)+3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(\operatorname{sh}(2y)\cdot\cos(2x)+3y\right)'_y=2\cdot\operatorname{ch}(2y)\cdot\cos(2x)+3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\operatorname{ch}(2y)\cdot\sin(2x)+3x\right)'_y=2\cdot\operatorname{sh}(2y)\cdot\sin(2x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\operatorname{sh}(2y)\cdot\cos(2x)+3y\right)'_x=-2\cdot\operatorname{sh}(2y)\cdot\sin(2x)$$

Итак, условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполнены; следовательно, функция $w=f(z)=\sin 2z+3z$ является аналитической.

5) Доказать аналитичность функции и найти производную:

$$w=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

Запишем данную функцию в алгебраической форме, полагая $z=x+iy$:

$$w=\frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cdot(\cos y+i\cdot\sin y)+e^{-x}\cdot(\cos(-y)+i\cdot\sin(-y))\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cdot(\cos y+i\cdot\sin y)+e^{-x}\cdot(\cos y-i\cdot\sin y)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cos y+i\cdot e^{x}\sin y+e^{-x}\cos y-i\cdot e^{-x}\sin y\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)\cos y+i\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)\sin y\right)=$$

$$=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{2}\cdot\cos y+i\cdot\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{2}\cdot\sin y=$$

$$=\operatorname{ch}x\cdot\cos y+i\cdot\operatorname{sh}x\cdot\sin y$$

Выделим действительную и мнимую части $w(z)=u(x,\ y)+i\cdot v(x,\ y)$:

$$u(x,\ y)=\operatorname{ch}x\cdot\cos y$$

$$v(x,\ y)=\operatorname{sh}x\cdot\sin y$$

Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\operatorname{ch}x\cdot\cos y)'_x=\operatorname{sh}x\cdot\cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=(\operatorname{sh}x\cdot\sin y)'_y=\operatorname{sh}x\cdot\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\operatorname{ch}x\cdot\cos y)'_y=-\operatorname{ch}x\cdot\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(\operatorname{sh}x\cdot\sin y)'_x=\operatorname{ch}x\cdot\sin y$$

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполнены; следовательно, функция $w=f(z)=\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ является аналитической.

Для всякой аналитической функции $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ производная $f(z)$ выражается через частные производные функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Вычисляем производную функции $f(z)$, используя выражение производной функции $w'(z)$ через частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$w'(z)=\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)'_z=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{sh}x\cdot\cos y+i\cdot\operatorname{ch}x\cdot\sin y$$

или непосредственно:

$$w'=\left(\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\right)'_{z}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{z}+e^{-z}\right)'_{z}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{z}-e^{-z}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x+iy}-e^{-x-iy}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cdot e^{iy}-e^{-x}\cdot e^{-iy}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cdot(\cos y+i\sin y)-e^{-x}\cdot(\cos(-y)+i\sin(-y))\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}\cdot(\cos y+i\sin y)-e^{-x}\cdot(\cos y-i\sin y)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos y\cdot\left(e^{x}-e^{-x}\right)+i\sin y\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right)=$$
$$=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\cos y+i\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\sin y=$$
$$=\operatorname{sh}x\cdot\cos y+i\cdot\operatorname{ch}x\cdot\sin y$$

6) Представить $w=e^{1-2iz}$, где $z=x+iy$, в виде $w=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

Проверить, будет ли она аналитической, если да, то найти производную в точке $z_0=\frac{\pi}{6}$.

Выделим в данном числе в явном виде действительную $u(x,y)$ и мнимую части $v(x,y)$:

$$w=\exp(1-2iz)=\exp\left(1-2i\cdot(x+iy)\right)=\exp(1-i2x+2y)=\exp(1+2y-i2x)=e^{1+2y}\cdot e^{-i2x}=$$
$$=e^{1+2y}\cdot(\cos(-2x)+i\cdot\sin(-2x))=e^{1+2y}\cdot\cos(2x)+i\cdot\left(-e^{1+2y}\cdot\sin(2x)\right)$$

- получено комплексное число в алгебраической форме записи.

$$\operatorname{Re}(w)=u(x,y)=e^{1+2y}\cdot\cos(2x)$$
$$\operatorname{Im}(w)=v(x,y)=-e^{1+2y}\cdot\sin(2x)$$

Для всякой аналитической функции $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ производная $f(z)$ выражается через частные производные функций $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Вычислим частные производные

$$u(x,y)=e^{1+2y}\cdot\cos(2x)$$
$$v(x,y)=-e^{1+2y}\cdot\sin(2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{1+2y}\cdot\cos(2x)\right)'_{x}=-2e^{1+2y}\cdot\sin(2x) \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\left(-e^{1+2y}\cdot\sin(2x)\right)'_{y}=-2e^{1+2y}\cdot\sin(2x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{1+2y}\cdot\cos(2x)\right)'_{y}=2e^{1+2y}\cdot\cos(2x) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\left(-e^{1+2y}\cdot\sin(2x)\right)'_{x}=-2e^{1+2y}\cdot\cos(2x)$$

Поскольку условия Коши-Римана выполняются ($u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$) для всех точек плоскости xOy, исследуемая функция является аналитической на всей плоскости, и её производная

$$w'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\left(-2e^{1+2y}\cdot\sin 2x\right)+i\cdot\left(-2e^{1+2y}\cdot\cos 2x\right)$$

В точке $z_0=\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+i\cdot 0$:

$$w'(z)=\left(-2e\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\left(-2e\cdot\cos\frac{\pi}{3}\right)=-e\sqrt{3}-i\cdot e$$

Литература:

1) Гусак А.А. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 59 (пример 9), стр. 20 (пример 2).

Вычислить значение функции.

7) Вычислить значение функции комплексного переменного $w=\cos z$ в точке $z_0=2+i$.

Для любого $z\in C$: $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Тогда

$$w(2+i)=\cos(2+i)=\frac{e^{i(2+i)}+e^{-i(2+i)}}{2}=\frac{e^{-1+2i}+e^{1-2i}}{2}=\frac{e^{-1}\cdot e^{2i}+e^{1}\cdot e^{-2i}}{2}=$$

$$=\frac{e^{-1}\cdot(\cos 2+i\cdot\sin 2)+e^{1}\cdot(\cos 2-i\cdot\sin 2)}{2}=\frac{\cos 2\cdot\left(e^{-1}+e^{1}\right)+i\cdot\sin 2\cdot\left(e^{-1}-e^{1}\right)}{2}=$$

$$=\frac{e^{1}+e^{-1}}{2}\cdot\cos 2-i\cdot\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\cdot\sin 2=\operatorname{ch}1\cdot\cos 2-i\cdot\operatorname{sh}1\cdot\sin 2$$

Ответ: $\cos(2+i)=\operatorname{ch}1\cdot\cos 2-i\cdot\operatorname{sh}1\cdot\sin 2$

Литература:

1) Морозова В.Д. "Теория функций комплексной переменной", 2009, том 10, изд. МГТУ, стр. 106;
2) Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. "Функции комплексного переменного", 2002, стр. 40.

8) Вычислить значение функции комплексного переменного $w=\operatorname{th} z$ в точке $z_0=\ln 3+\frac{\pi i}{4}$, ответ записать в алгебраической форме.

Для любого $z\in C$: $\operatorname{th} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$

Значит

$$w(z_0)=\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)=\frac{e^{\ln 3+\frac{\pi}{4}i}-e^{-\ln 3-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\ln 3+\frac{\pi}{4}i}+e^{-\ln 3-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{3e^{\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{4}i}}{3e^{\frac{\pi}{4}i}+\frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{4}i}}=$$

$$=\frac{9e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}}{9e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}}=\frac{9\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)-\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{9\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}{9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}=\frac{9\left(\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}\right)}{9\left(\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{9\sqrt{2}+i\cdot 9\sqrt{2}-\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}{9\sqrt{2}+i\cdot 9\sqrt{2}+\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}+i\cdot 10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}+i\cdot 8\sqrt{2}}=\frac{4+5i}{5+4i}=$$

$$=\frac{(4+5i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}=\frac{20+25i-16i+20}{25+16}=\frac{40+9i}{41}=\frac{40}{41}+i\cdot\frac{9}{41}$$

- результат вычисления в алгебраической форме.

9) Вычислить значение функции комплексного переменного $\omega=\mathrm{Ln}\,z$ в точке $z_0=-1$. Указать главное значение функции.

Логарифмическая функция

$$\omega=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\cdot(\arg z+2\pi k)\qquad k\in Z$$

Главным значением логарифма числа z называют значение, соответствующее главному значению аргумента числа z; т.е. главное значение логарифма получим при $k=0$:

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z$$

► Модуль и аргумент числа $z_0=-1=-1+0i$:

$$|z_0|=1$$

$$\arg z_0=\pi$$

Следовательно

$$\omega(-1)=\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i\cdot(\pi+2\pi k)=0+(2k+1)\pi i\qquad k\in Z$$

- значения функции комплексного переменного в точке $z_0=-1$, записанные в алгебраической форме.

(логарифмическая функция $\omega=\mathrm{Ln}\,z$ является многозначной)

► Главное значение логарифма числа z

$$\ln(-1)=0+\pi i$$

10) Вычислить значение функции комплексного переменного $\omega=(1+i)^z$ в точке $z_0=i$.

При любых $w,z\in C:\quad w^z=e^{z\cdot \mathrm{Ln}\,w}$.

$$\omega=(1+i)^i=e^{i\cdot \mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i\cdot(\ln|1+i|+i\cdot\arg(1+i)+2\pi k i)},\quad k\in Z$$

Модуль и аргумент числа $w=1+i$:

$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\arg(1+i)=\mathrm{arctg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$$

$$\omega(i)=(1+i)^i=e^{i\cdot(\ln|1+i|+i\cdot\arg(1+i)+2\pi k i)}=e^{i\cdot\left(\ln\sqrt{2}+i\cdot\frac{\pi}{4}+2\pi k i\right)}=e^{i\cdot\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi k}=e^{i\cdot\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi}{4}-2\pi k}=$$

$$=e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cdot e^{i\cdot\frac{\ln 2}{2}}=e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cdot\left(\cos\left(\frac{\ln 2}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\right),\quad k\in Z$$

- значения функции комплексного переменного $\omega(z)$ в точке $z_0=i$, записанные в тригонометрической форме (функция многозначная).

11) Вычислить значение функции комплексного переменного $\omega=\mathrm{arcctg}\,z$ в точке $z_0=1+2i$, ответ записать в алгебраической форме.

$$\mathrm{Arcctg}\,z=\frac{i}{2}\cdot\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$$

$$\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\cdot(\arg z+2\pi k),\quad k\in Z$$

(при $k=0$ получаем главное значение логарифма $\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z$)

$$\frac{z_0-i}{z_0+i}=\frac{1+2i-i}{1+2i+i}=\frac{1+i}{1+3i}=\frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{1+i-3i+3}{1+9}=\frac{4-2i}{10}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$$

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_0-i}{z_0+i}\right)=\mathrm{Ln}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)=\ln\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2}+i\cdot\left(-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+i\cdot\left(-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k\right)=-\frac{1}{2}\cdot\ln 5+i\cdot\left(-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k\right),\quad k\in Z$$

и

$$\ln\left(\frac{z_0-i}{z_0+i}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\ln 5-i\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\omega=\mathrm{arcctg}\,z_0=\frac{i}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln 5-i\cdot\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{2}-i\cdot\frac{1}{4}\ln 5\approx 0{,}232-i\cdot 0{,}402$$

(главное значение $\mathrm{Arcctg}(1+2i)$)

12) Вычислить значение функции комплексного переменного $\omega=\arccos z$ в точке $z_0=1+i$, ответ записать в алгебраической форме.

$$\mathrm{Arccos}\, z=-i\cdot \mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$
$$\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\cdot(\arg z+2\pi k),\quad k\in Z$$

При $k=0$ получаем главное значение логарифма

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z$$

и главное значение арккосинуса

$$\arccos z=\arg\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)-i\cdot\ln\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|$$

Квадратный корень из комплексного числа даёт два значения; для главного значения функции выбираем одно, аргумент которого попадает в промежуток $[0;\pi]$.

В данном случае:

$$\arccos(1+i)=-i\cdot\ln\left(1+i+\sqrt{(1+i)^2-1}\right)=-i\cdot\ln\left(1+i+\sqrt{1+2i-1-1}\right)=$$
$$=-i\cdot\ln\left(1+i+\sqrt{2i-1}\right)$$

Корень из числа $-1+2i$ принимает два значения. Найдём их:

$$-1+2i=\sqrt{(-1)^2+2^2}\cdot\left(\cos(-\mathrm{arctg}\,2)+i\cdot\sin(-\mathrm{arctg}\,2)\right)$$
$$\sqrt{-1+2i}=\sqrt{\sqrt{5}}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\mathrm{arctg}\,2+2\pi k}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\mathrm{arctg}\,2+2\pi k}{2}\right)\right)$$
$$\sqrt{-1+2i}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{5}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{-\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\dfrac{-\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)\right),\quad k=0\\ \sqrt[4]{5}\cdot\left(\cos\left(\pi+\dfrac{-\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\pi+\dfrac{-\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)\right),\quad k=1\end{array}\right.$$

Используя формулы $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ и $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, и принимая во внимание, что $\cos(\mathrm{arctg}\,2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, получим:

$$\cos\left(\frac{\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$
$$\sin\left(\frac{\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

и тогда

$$\sqrt{-1+2i}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{5}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}-i\cdot\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right),\quad k=0\\ \sqrt[4]{5}\cdot\left(-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}+i\cdot\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}\right),\quad k=1\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}-i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right),\quad k=0\\ \left(-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}+i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right),\quad k=1\end{array}\right.$$

$$1+i+\sqrt{-1+2i}=\left[\begin{array}{ll}\left(\left(1+\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)+i\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\right), & k=0\\ \left(\left(1-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)+i\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right), & k=1\end{array}\right.$$

Из двух значений выбираем второе, т.к. его аргумент попадает в промежуток $[0;\pi]$. Итак,

$$1+i+\sqrt{-1+2i}=\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)+i\cdot\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$$

и

$$\arccos z_0=\arg\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)-i\cdot\ln\left(z_0+\sqrt{z_0^2-1}\right)=$$

$$=\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)}\right)-i\cdot\ln\left|\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)+i\cdot\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)\right|=$$

$$=\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)}\right)-i\cdot\ln\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^2+\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)}\right)-i\cdot\ln\sqrt{2+\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}-\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)}\approx 1{,}722+i\cdot 0{,}592$$

(главное значение $\operatorname{Arccos}(1+i)$)

Литература:

1) Морозова В.Д. "Теория функций комплексной переменной", 2009, том 10, изд. МГТУ, стр. 106;
2) Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. "Функции комплексного переменного", 2002, стр. 40.