

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма комплексного числа), где $\{x, y\} \subset R$;

$x = \operatorname{Re} z$ - действительная часть комплексного числа z ;

$y = \operatorname{Im} z$ - мнимая часть комплексного числа z ;

i - мнимая единица, $i^2 = -1$.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряжённым** комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой $M(x, y)$, или **радиус-вектором** $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Длина радиус-вектора называется **модулем** комплексного числа: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox , называется **аргументом** комплексного числа $\operatorname{Arg} z$:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

где $-\pi < \arg z \leq \pi$ - **главное значение аргумента** (иногда для удобства полагают $0 \leq \arg z < 2\pi$).

1) Перевести число

$$z = \sqrt{3} - j$$

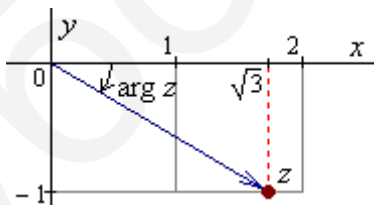
из алгебраической формы в тригонометрическую и показательную формы.

Вычислим модуль и главное значение аргумента данного комплексного числа:

$$z = \sqrt{3} - j$$

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

Для нахождения аргумента числа схематически изобразим число на комплексной плоскости:



- из рисунка видим, что $\arg z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Тригонометрическая форма числа:

$$z = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

Показательная форма числа:

$$z = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}j}$$

(мнимую единицу обозначают в математике i , а например в электротехнике j)

Проверка в Mathcad 14:

$$2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) \rightarrow \sqrt{3} - i \qquad 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{6}i} \rightarrow \sqrt{3} - i$$

Литература:

- 1) Гусак А.А., Бричкова Е.А., Гусак Г.М. "Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление", 2002, стр. 23;
- 2) Лунгу К.Н., Макаров Е.В. "Высшая математика. Руководство к решению задач", часть 1, 2005, стр. 135;
- 3) Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. "Функции комплексного переменного", 2003;
- 4) Пантелеев А.В., Якимов А.С. "Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах", 2001.

2) Вычислить z^5 и $\sqrt[3]{z}$:
 $z = 5 + 4i$

► Запишем данное число в тригонометрической форме.

$$|z| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$$

$$z = \sqrt{41} \cdot \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) + i \cdot \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) \right)$$

Для возведения в степень используем формулу Муавра.

Формула Муавра:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\begin{aligned} z^5 &= (\sqrt{41})^5 \cdot \left(\cos \left(5 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) + i \cdot \sin \left(5 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) \right) = \\ &= 1681\sqrt{41} \cdot \left(\cos \left(5 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) + i \cdot \sin \left(5 \operatorname{arctg} \frac{4}{5} \right) \right) \end{aligned}$$

- результат в тригонометрической форме.

► Для получения результата в алгебраической форме можно возвести в пятую степень непосредственным перемножением:

$$\begin{aligned} z^5 &= (5 + 4i)^5 = ((5 + 4i)^2)^2 (5 + 4i) = (25 + 40i - 16)^2 (5 + 4i) = (9 + 40i)^2 (5 + 4i) = \\ &= (81 + 720i - 1600)(5 + 4i) = (-1519 + 720i)(5 + 4i) = \\ &= -7595 + 3600i - 6076i - 2880 = -10475 - 2476i \end{aligned}$$

► Извлечём корень, используя тригонометрическую форму записи числа.

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

или

$$\sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{\sqrt{41} \cdot \left(\cos\left(\arctg \frac{4}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\arctg \frac{4}{5}\right) \right)} = \\ &= \sqrt[6]{41} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arctg \frac{4}{5} + 2\pi k}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arctg \frac{4}{5} + 2\pi k}{3}\right) \right)\end{aligned}$$

где $k \in \{0, 1, 2\}$ (три значения корня).

3) Выполнить действие, ответ записать в тригонометрической форме:

$$z = (-2)^{\sqrt{2}}$$

$$z = (-2)^{\sqrt{2}} = (-2 + 0i)^{\sqrt{2}} = (2e^{\pi i})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \cdot e^{\pi\sqrt{2}i} = 2^{\sqrt{2}} \cdot e^{(\pi\sqrt{2}-2\pi)i} = 2^{\sqrt{2}} \cdot e^{(\sqrt{2}-2)\pi i}$$

$$(-\pi < \varphi \leq \pi)$$

Результат в тригонометрической форме:

$$z = 2^{\sqrt{2}} \cdot (\cos((\sqrt{2}-2)\pi) + i \cdot \sin((\sqrt{2}-2)\pi))$$

4) Найти корень квадратный из числа $-1 \pm 2\sqrt{2} \cdot i$.

Вычислим квадратный корень из комплексного числа по формуле

$$\sqrt{a+bi} = u + vi$$

где

$$u^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{и} \quad v^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

В данном случае

$$a = -1$$

$$b = \pm 2\sqrt{2}$$

$$u^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{(-1)^2 + (\pm 2\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$v^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 + (\pm 2\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

и

$$\sqrt{-1 \pm 2\sqrt{2} \cdot i} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} \cdot i \\ 1 - \sqrt{2} \cdot i \\ -1 + \sqrt{2} \cdot i \\ -1 - \sqrt{2} \cdot i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm(1 + \sqrt{2} \cdot i) \\ \pm(1 - \sqrt{2} \cdot i) \end{bmatrix}$$

5) Дано комплексное число $a = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$.

- а) записать число a в алгебраической форме;
- б) изобразить его на координатной плоскости;
- в) записать число a в тригонометрической и показательной формах;
- г) вычислить a^5 ;
- д) найти все корни уравнения $z^3 - a = 0$.

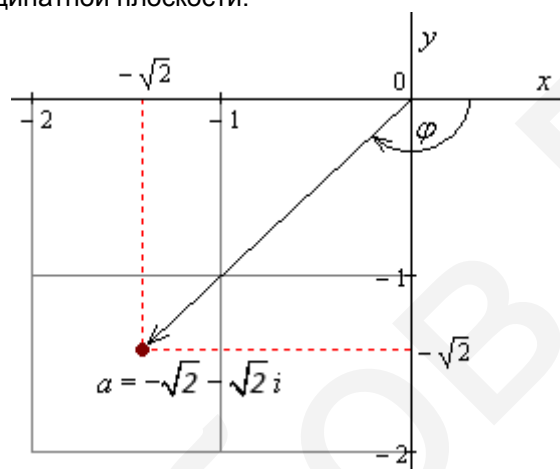
а)

$$a = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i} = \frac{-2\sqrt{2} \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{-2\sqrt{2} \cdot (1+i)}{1+1} = -\sqrt{2} \cdot (1+i) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

- алгебраическая форма числа a .

б)

Изобразим его на координатной плоскости:



$$\operatorname{Re}(a) = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{Im}(a) = -\sqrt{2}$$

Геометрическим изображением комплексного числа является точка или радиус-вектор с координатами $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

в)

Модуль числа

$$|a| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

Главное значение аргумента числа (из рисунка с изображением числа a):

$$\arg a = \varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

И тогда

$$a = 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) \text{ - тригонометрическая форма числа.}$$

Для записи числа в показательной форме используем [формулу Эйлера](#):

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

$$a = 2 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i} \text{ - показательная форма числа.}$$

г)

Вычислим a^5 , используя полученную ранее показательную форму числа:

$$\begin{aligned} a^5 &= \left(2 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i} \right)^5 = 2^5 \cdot e^{-\frac{15\pi}{4}i} = 32 \cdot \left(\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right) \right) = \\ &= 32 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i \end{aligned}$$

д)

Решаем уравнение $z^3 - a = 0$

$$z^3 = a$$

$$\begin{aligned} z = \sqrt[3]{a} &= \sqrt[3]{2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) \right), \\ k &= 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Придавая k значения $0, 1, 2$, находим три значения корня кубического из числа:

$$\beta_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\beta_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\beta_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{13\pi}{12} \right)$$

(на комплексной плоскости это три точки, равномерно расположенные на окружности радиусом $r = \sqrt[3]{2}$ с центром в начале координат)

Проверка в Mathcad 14:

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{1-i} &\rightarrow \sqrt{2} \cdot (-1-i) & 2 \cdot \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) &\rightarrow \sqrt{2} \cdot (-1-i) \\ 2 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i} &\rightarrow \sqrt{2} \cdot (-1-i) & \left(\frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{1-i} \right)^5 &\rightarrow (16 + 16i) \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

6) Найти все корни уравнения

$$z^5 = -j.$$

Построить их на комплексной плоскости.

Решаем уравнение:

$$z^5 = -j$$

$$z = \sqrt[5]{-j}$$

Для извлечения корня представим число $\alpha = -j$ в тригонометрической форме:

$$|\alpha| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\arg \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Используя формулу

$$\sqrt[n]{r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

извлекаем корень:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[5]{-j} = \sqrt[5]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[5]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right) + j \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right) \right) = \\ &= \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right) + j \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right), \text{ где } k = \{0, 1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Перебирая значения k , получаем пять различных решений (пять корней) исходного уравнения:

$$z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

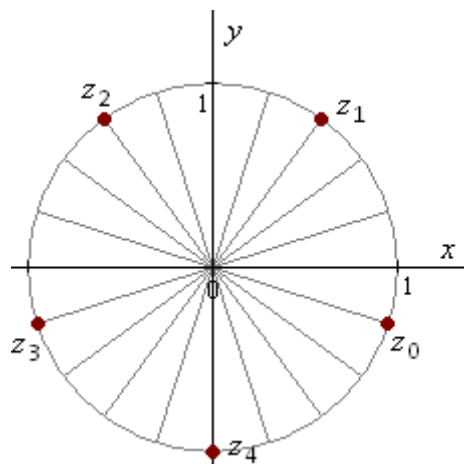
$$z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) + j \sin\left(\frac{7\pi}{10}\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{11\pi}{10}\right) + j \sin\left(\frac{11\pi}{10}\right)$$

$$z_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

На комплексной плоскости все n значений корня n -й степени из числа z располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей.

Разметим окружность радиуса 1 равными долями через $\frac{\pi}{10}$ (т.к. главные значения аргументов найденных корней кратно этой величине) и, начиная например с угла $\frac{3\pi}{10}$, разобьём окружность на 5 равных частей:



7) Решить уравнение, ответ записать в показательной форме:

а) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$;

б) $i \cdot z^{120} = 1 + i$.

а)

$$z^6 - 4z^3 + 8 = 0$$

$$z^3 = t$$

$$t^2 - 4t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = 2 \pm 2i$$

Запишем полученный промежуточный результат в показательной форме:

$$|t| = \sqrt{2^2 + (\pm 2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg t = \operatorname{arctg} \frac{\pm 2}{2} = \operatorname{arctg}(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$t = 2\sqrt{2} \cdot e^{\pm \frac{\pi}{4}i}$$

Тогда решение уравнения в показательной форме имеет вид (всего 6 значений корня):

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2} \cdot e^{\pm \frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pm \pi + 2\pi k}{3}i}$$

где $k \in \{0, 1, 2\}$

б)

$$i \cdot z^{120} = 1 + i$$

$$z^{120} = \frac{1+i}{i}$$

$$z^{120} = \frac{(1+i) \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i-1}{-1} = 1-i$$

$$z = \sqrt[120]{1-i}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{4}$$

$$1-i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$z = \sqrt[120]{1-i} = \sqrt[240]{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{120}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{120}\right) \right) \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 118, 119\}$$

В показательной форме:

$$z = \sqrt[240]{2} \cdot e^{\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{120}i}, \text{ где } k \in \{0, 1, 2, \dots, 118, 119\}$$

8) Решить уравнение $|z| - (i-1)z = \frac{9}{i}$

$$|z| - (i-1)z = \frac{9}{i}$$

$$|z| - (i-1)z = -9i$$

$$|z| - (i-1)z + 9i = 0$$

Полагая $z = x + i \cdot y$, запишем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (i-1)(x + i \cdot y) + 9i = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (i \cdot x - x - y - i \cdot y) + 9i = 0$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i \cdot x + x + y + i \cdot y + 9i = 0$$

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} + (-x + y + 9) \cdot i = 0$$

откуда

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ -x + y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$x + y = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

$$2xy = 0$$

$$xy = 0$$

и

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \end{cases}$$

Но поскольку в процессе решения было возведение в квадрат, проверим подстановкой, нет ли посторонних решений. Решение $(9; 0)$ - постороннее.

Ответ: $z = -9i$.

9) Вычислить

а) $(-1)^{\sqrt{5}}$;

б) $\operatorname{Arcsin} 5$.

а)

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad z \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(-1)^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5} \cdot \operatorname{Ln}(-1)} = e^{i \cdot \pi \sqrt{5} (2k+1)} = \cos(\pi \sqrt{5} \cdot (2k+1)) + i \cdot \sin(\pi \sqrt{5} \cdot (2k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Вычисление логарифма:

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k+1)$$

б)

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad z \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Arcsin} 5 = -i \operatorname{Ln}(5i + \sqrt{1-5^2}) = -i \operatorname{Ln}(5i + \sqrt{-24}) = -i \operatorname{Ln}(5i \pm 2\sqrt{6}i) = -i \operatorname{Ln}((5 \pm 2\sqrt{6})i)$$

Упростим полученное выражение. Для этого вычислим аргументы и модули чисел

$$w_1 = w_1 = (5 + 2\sqrt{6})i \quad \text{и} \quad w_2 = (5 - 2\sqrt{6})i, \quad \text{стоящих под знаком логарифма. Имеем:}$$

$$\arg(5 + 2\sqrt{6})i = \arg(5 - 2\sqrt{6})i = \frac{\pi}{2}$$

$$|(5 + 2\sqrt{6})i| = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$|(5 - 2\sqrt{6})i| = 5 - 2\sqrt{6}$$

Следовательно

$$\operatorname{Ln}((5 \pm 2\sqrt{6})i) = \ln(5 \pm 2\sqrt{6}) + \pi i \left(\frac{1}{2} + 2k \right)$$

и окончательно запишем

$$z = \left(\frac{1}{2} + 2k \right) \pi - i \cdot \ln(5 \pm 2\sqrt{6}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Литература:

- 1) Посицельская Л.Н. "Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях", 2007, стр. 46;
- 2) Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. "Функции комплексного переменного", 2002, стр. 38, 40.

10) Выполнить деление с остатком $f(x) = x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

Выполним деление с помощью [схемы Горнера](#). Составим таблицу, в которой над чертой расположены коэффициенты многочлена $f(x)$, под чертой соответствующие коэффициенты частного и остаток, последовательно вычисляемые, а слева сбоку - значение $c = 1 - 2i$ в данном примере.

	1	-1	-1	0
1-2i	1	-2i	5-2i	-9+8i

Таким образом:

$$\frac{f(x)}{x-1+2i} = \frac{x^3 - x^2 - x}{x-1+2i} = (x^2 - 2ix + 5 - 2i) + \frac{-9+8i}{x-1+2i}$$

или

$$f(x) = x^3 - x^2 - x = (x - 1 + 2i)(x^2 - 2ix + 5 - 2i) - 9 + 8i.$$

Ответ:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x = (x - 1 + 2i)(x^2 - 2ix + 5 - 2i) - 9 + 8i.$$