

1) Исследовать на локальный экстремум функцию

а) 2-х переменных  $z = z(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ ;

б) 3-х переменных  $u = u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48z$ .

**a)**

$$z'_x = \left( e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) \right)'_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) + e^{\frac{x}{2}} = \left( \frac{x + y^2}{2} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$z'_y = \left( e^{\frac{x}{2}}(x + y^2) \right)'_y = 2y \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

(необходимое условие наличия экстремума)

$$\begin{cases} \left( \frac{x + y^2}{2} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ 2y \cdot e^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x + y^2}{2} + 1 = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = 0 \end{cases}$$

- окружность с линией  $y = 0$  пересекается в двух точках.

$$\begin{cases} x_1 = -2\sqrt{2} \\ y_1 = 0 \\ x_2 = 2\sqrt{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Найдены две стационарные точки  $P_1(-2\sqrt{2}; 0)$ ,  $P_2(2\sqrt{2}; 0)$ . Проверим выполнение достаточных условий наличия экстремума в данных точках.

$$A = z''_{xx} = \left( \left( \frac{x + y^2}{2} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)'_x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} + \left( \frac{x + y^2}{2} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{x + y^2}{4} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$B = z''_{xy} = \left( \left( \frac{x + y^2}{2} + 1 \right) \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)'_y = y \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$C = z''_{yy} = \left( 2y \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)'_y = 2e^{\frac{x}{2}}$$

► В точке  $P_1(-2\sqrt{2}; 0)$ :

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} \approx 0,07 > 0$$

$$B = 0$$

$$C = \frac{2}{e^{\sqrt{2}}} \approx 0,49$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0,07 & 0 \\ 0 & 0,49 \end{vmatrix} \approx 0,03 > 0$$

- в точке  $P_1(-2\sqrt{2}; 0)$  **минимум**, т.к.  $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ . Значение функции в этой точке  $z(-2\sqrt{2}; 0) = -\frac{2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$ .

► В точке  $P_2(2\sqrt{2}; 0)$ :

$$A = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{\sqrt{2}} \approx 7,02 > 0$$

$$B = 0$$

$$C = 2e^{\sqrt{2}} \approx 8,23$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 7,02 & 0 \\ 0 & 8,23 \end{vmatrix} \approx 57,78 > 0$$

- в точке  $P_2(2\sqrt{2}; 0)$  **минимум**, т.к.  $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ . Значение функции в этой точке  $z(2\sqrt{2}; 0) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}}$ .

**Ответ:** функция имеет два локальных минимума  $z(-2\sqrt{2}; 0) = -\frac{2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$  и  $z(2\sqrt{2}; 0) = 2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}}$ .

**б)**

$$u = u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48z$$

► Определим стационарные точки функции трёх переменных  $u(x, y, z)$  из условия

$$\begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \\ u'_z = 0 \end{cases}$$

(необходимое условие существования экстремума)

$$u'_x = (x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48z)'_x = 3x^2 - 12$$

$$u'_y = (x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48z)'_y = 3y^2 - 27$$

$$u'_z = (x^3 + y^3 + z^3 - 12x - 27y - 48z)'_z = 3z^2 - 48$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 12 = 0 \\ 3y^2 - 27 = 0 \\ 3z^2 - 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -3 \\ z_1 = -4 \end{cases} & \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -3 \\ z_2 = 4 \end{cases} & \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 3 \\ z_3 = -4 \end{cases} & \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = 3 \\ z_4 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_5 = 2 \\ y_5 = -3 \\ z_5 = -4 \end{cases} & \begin{cases} x_6 = 2 \\ y_6 = -3 \\ z_6 = 4 \end{cases} & \begin{cases} x_7 = 2 \\ y_7 = 3 \\ z_7 = -4 \end{cases} & \begin{cases} x_8 = 2 \\ y_8 = 3 \\ z_8 = 4 \end{cases} \end{bmatrix}$$

Найдены восемь стационарных точек:

$$P_1(-2; -3; -4), P_2(-2; -3; 4), P_3(-2; 3; -4), P_4(-2; 3; 4),$$

$$P_5(2; -3; -4), P_6(2; -3; 4), P_7(2; 3; -4), P_8(2; 3; 4).$$

Проверим их на соответствие **достаточному** условию наличия экстремума.

При исследовании на локальный экстремум функции трёх переменных  $u = u(x, y, z)$  составляется матрица квадратичной формы функции относительно дифференциалов  $dx, dy, dz$  - матрица Гессе

$$\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{yy} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{zz} \end{pmatrix}$$

и рассматривается в каждой стационарной точке  $P_i$ .

- Если эта квадратичная форма окажется определённой, то функция  $u = u(x, y, z)$  в точке  $P_i$  имеет экстремум:
  - а) **минимум**, если квадратичная форма положительно определённая;
  - б) **максимум**, если квадратичная форма отрицательно определённая.
- Если же квадратичная форма окажется неопределённой, то в точке  $P_i$  экстремума **нет**.
- В случаях неотрицательной определённости или неположительной определённости квадратичной формы требуется дополнительное исследование - экстремум **может быть**.

### Матрица Гессе

► Матрица Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 12$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 27$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 48$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z$$

Заметим, что смешанные производные равны (теорема Шварца):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0.$$

Итак,

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

### Критерий Сильвестра

- ▶ Знакоопределённость квадратичной формы можно установить:
  - а) используя критерий Сильвестра;
  - б) анализируя собственные значения матрицы Гессе;
  - в) анализируя второй дифференциал функции.

Для оценки определённости квадратичной формы можно использовать **критерий Сильвестра**.

▶ Для того, чтобы квадратичная форма от  $n$  переменных была **положительно определённой**, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры её матрицы  $A$  были положительными.

▶ Для того, чтобы квадратичная форма от  $n$  переменных была **отрицательно определённой**, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы  $A$  квадратичной формы чередовались, начиная со знака минус.

▶ Для **неопределённости** (знакопеременности) квадратичной формы достаточно, чтобы хотя бы один главный минор чётного порядка был отрицателен, либо два главных минора нечётного порядка имели бы разные знаки (достаточный признак неопределённости квадратичной формы).

▶ В случае, если выполняется одно из условий знакоопределённости, но при этом один или более угловых миноров равны нулю - квадратичная форма **неотрицательно определённая или неположительно определённая**.

- ▶ В точке  $P_1(-2; -3; -4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = -12 < 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 216 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = -5184 < 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 < 0 \\ M_2 > 0 \\ M_3 < 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_1$  функция матрица Гессе отрицательно определённая (знаки  $M_i$

чередуются, начиная со знака минус), и следовательно в данной точке функция **имеет максимум**

$$u(-2; -3; -4) = (-2)^3 + (-3)^3 + (-4)^3 - 12 \cdot (-2) - 27 \cdot (-3) - 48 \cdot (-4) = 198$$

► В точке  $P_2(-2; -3; 4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = -12 < 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = 216 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 5184 > 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 < 0 \\ M_2 > 0, \\ M_3 > 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_2$  функция матрица Гессе знаконеопределённая ( $M_1$  и  $M_3$  разного знака),

и следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_3(-2; 3; -4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = -12 < 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -216 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 5184 > 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 < 0 \\ M_2 < 0, \\ M_3 > 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_3$  функция матрица Гессе знаконеопределённая ( $M_2$  отрицателен), и

следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_4(-2; 3; 4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = -12 < 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = -216 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = -5184 < 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 < 0 \\ M_2 < 0, \\ M_3 < 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_4$  функция матрица Гессе знаконеопределённа ( $M_2$  отрицателен), и

следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_5(2; -3; -4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = 12 > 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = -216 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 5184 > 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 < 0, \\ M_3 > 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_5$  функция матрица Гессе знаконеопределённа ( $M_2$  отрицателен), и

следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_6(2; -3; 4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = 12 > 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} = -216 < 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = -5184 < 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 < 0, \\ M_3 < 0 \end{cases}$ , то в точке  $P_6$  функция матрица Гессе знаконеопределённа ( $M_2$  отрицателен), и

следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_7(2; 3; -4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = 12 > 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = -5184 < 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 > 0, \\ M_3 < 0 \end{cases}$  то в точке  $P_7$  функция матрица Гессе знаконеопределённая ( $M_1$  и  $M_3$  разного знака),

и следовательно в данной точке функция **не имеет экстремума**.

► В точке  $P_8(2; 3; 4)$ :

$$H = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix};$$

угловые миноры:  $M_1 = 12 > 0$ ,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 216 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} = 5184 > 0$$

Поскольку  $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 > 0, \\ M_3 > 0 \end{cases}$  то в точке  $P_8$  функция матрица Гессе положительно определённая (все  $M_i$

положительны), и следовательно в данной точке функция **имеет минимум**

$$u(2; 3; 4) = 2^3 + 3^3 + 4^3 - 12 \cdot 2 - 27 \cdot 3 - 48 \cdot 4 = -198$$

**Ответ:** функция имеет два экстремума - локальный минимум  $u(2; 3; 4) = -198$

и локальный максимум  $u(-2; -3; -4) = 198$ .

2) Найти точки экстремумов функции  $u(x, y, z)$  при указанных ограничениях:

$$u = x^2 + y^2 + (z-3)^2; \quad x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8.$$

- требуется найти экстремумы функции трёх переменных  $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$  при условии, что аргументы функции связаны уравнением  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$  (задача поиска условного экстремума).

Разберём возможные способы решения задачи (на примере функции трёх переменных).

Экстремум функции  $u = f(x, y, z)$  называется **условным**, если он достигнут при условии, что аргументы функции связаны уравнением  $\varphi(x, y, z) = 0$ , называемым уравнением связи.

Задачу можно решить тремя способами.

**1. Метод исключения части переменных.** Допустим, что при рассматриваемых значениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  уравнение  $\varphi(x, y, z) = 0$  определяет  $z$  как однозначную дифференцируемую функцию  $z = \psi(x, y)$ . Подставляя в функцию  $f(x, y, z)$  вместо  $z$  функцию  $\psi(x, y)$ , получаем функцию двух переменных  $x$  и  $y$ :  $u = f(x, y, \psi(x, y)) = F(x, y)$ . Экстремум (безусловный) функции  $F(x, y)$  является искомым условным экстремумом функции  $f(x, y, z)$  при наличии связи  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Отметим, что этот способ требует фактического решения уравнения  $\varphi(x, y, z) = 0$  относительно какой-либо переменной, и это может быть не всегда удобно.

**2. Метод неопределённых множителей Лагранжа.** Составляется **функция Лагранжа**  $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z)$ , которая исследуется на экстремум при дополнительном условии  $d\varphi = 0$  (полный дифференциал функции  $\varphi(x, y, z)$  равен нулю, т.е.  $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0$ ).

**3. Метод геометрической интерпретации.** Может быть использован для функции двух переменных в случае, когда функции соответствует какая-либо простая поверхность (например, плоскость), а условию соответствует очевидная линия.

Для решения данной задачи используем **метод неопределённых множителей Лагранжа**.

Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + (z-3)^2) + \lambda \cdot (x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

где  $\lambda$  - неопределённый постоянный множитель,

$\varphi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8$  - некоторое условие, задаваемое уравнением связи  $\varphi(x, y, z) = 0$ ,

$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$  - исследуемая функция.

Для определения множителя  $\lambda$  и координат возможных точек экстремума решаем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



Система имеет четыре решения на множестве  $R$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(z - 3) + 8\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1, & x_1 = -2, y_1 = 0, z_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1, & x_2 = 2, y_2 = 0, z_2 = -1 \\ \lambda_3 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8}, & x_3 = 0, y_3 = 0, z_3 = -\sqrt{2} \\ \lambda_4 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8}, & x_4 = 0, y_4 = 0, z_4 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Итак, найдены четыре стационарные точки:

$M_1(-2; 0; -1)$ , при этом  $\lambda_1 = -1$ ,

$M_2(2; 0; -1)$ , при этом  $\lambda_2 = -1$ ,

$M_3(0; 0; -\sqrt{2})$ , при этом  $\lambda_3 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx -0,8$ ,

$M_4(0; 0; \sqrt{2})$ , при этом  $\lambda_4 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0,3$ .

Наличие критической точки ещё не гарантирует наличие экстремума функции. Достаточным критерием наличия экстремума функции в точке служит знакоопределённость квадратичной формы функции.

Если квадратичная форма (т.е. второй дифференциал функции Лагранжа, при выполнении условий связи)

а) будет **отрицательно** определённая, то в точке строгий условный **максимум**;

б) если **положительно** определённая, то в точке строгий условный **минимум**;

в) если неопределённая, то точка не является точкой условного экстремума.

Квадратичная форма функции определяется как

$$A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \text{ и фактически является вторым дифференциалом функции.}$$

Второй дифференциал функции  $\Phi(x, y, z)$  равен

$$d^2\Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} dy dz$$

или, в случае функции двух переменных,

$$d^2\Phi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} dx dy$$

Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2 + 4\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2(z - 3) + 8\lambda z$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2 + 8\lambda$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
d^2\Phi(x, y, z) &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} dx dy + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} dx dz + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} dy dz = \\
&= (2+2\lambda) dx^2 + (2+4\lambda) dy^2 + (2+8\lambda) dz^2 = \\
&= 2 \cdot [(1+\lambda) dx^2 + (1+2\lambda) dy^2 + (1+4\lambda) dz^2]
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$dx^2 = (dx)^2 \text{ и т.д., т.е. } dx^2 > 0, dy^2 > 0 \text{ и } dz^2 > 0.$$

Следовательно, в точках  $M_1(-2; 0; -1)$  и  $M_2(2; 0; -1)$ , для которых  $\lambda_{1,2} = -1$ , второй дифференциал  $d^2\Phi < 0$ , что означает наличие в этих точках **максимума**.

В точке  $M_3(0; 0; -\sqrt{2})$ , для которой  $\lambda_3 = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx -0,8$ , второй дифференциал  $d^2\Phi$  может принимать любой знак, что означает отсутствие в этой точке условного экстремума.

В точке  $M_4(0; 0; \sqrt{2})$ , для которой  $\lambda_4 = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0,3$ , второй дифференциал  $d^2\Phi > 0$  может иметь любой знак, что означает наличие в этих точках **минимума**.

**Ответ:** функция имеет два локальных условных максимума:

$$u(-2; 0; -1) = 20$$

$$u(2; 0; -1) = 20$$

и один локальный условный минимум:

$$u(0; 0; \sqrt{2}) = 11 - 6\sqrt{2}.$$

### 3) Определить экстремумы функции

$$f(x, y) = e^{yx^2}, \text{ если } y^2 + 2x^2 = 12, x > 0, y > 0.$$

Для решения задачи используем **метод исключения части переменных**.

Используем уравнение связи  $y^2 + 2x^2 = 12$  для замены переменной  $x$ :

$$y^2 + 2x^2 = 12$$

$$x^2 = -\frac{y^2}{2} + 6$$

и

$$f(x, y) = e^{yx^2} = \exp\left(y \cdot \left(-\frac{y^2}{2} + 6\right)\right) = \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right)$$

Фактически получили функцию одной переменной:

$$f(y) = \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right)$$

Найдём её экстремумы.

$$f'(y) = \left(\exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right)\right)' = \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right) \cdot \left(6y - \frac{y^3}{2}\right)' =$$

$$= \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right) \cdot \left(6 - \frac{3y^2}{2}\right) = \left(6 - \frac{3y^2}{2}\right) \cdot \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right)$$

$$f'(y) = 0$$

$$\left(6 - \frac{3y^2}{2}\right) \cdot \exp\left(6y - \frac{y^3}{2}\right) = 0$$

$$6 - \frac{3y^2}{2} = 0$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

С учётом условия  $y > 0$  имеем одну стационарную точку  $y = 2$ . Идентифицируем её.

|         |            |     |                |
|---------|------------|-----|----------------|
| $y$     | $(0; 2)$   | $2$ | $(2; +\infty)$ |
| $f'(y)$ | $+$        | $0$ | $-$            |
| $f(y)$  | $\nearrow$ | max | $\searrow$     |

( $\nearrow$  - интервал возрастания;  $\searrow$  - интервал убывания)

Найдём абсциссу экстремальной точки:

$$4 + 2x^2 = 12$$

$$2 + x^2 = 6$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

и, учитывая условие  $x > 0$ , получаем  $x = 2$ .

Итак, найдена стационарная точка  $P(2; 2)$ .

**Ответ:** данная функция при указанных условиях экстремумов имеет максимум  $f(2; 2) = e^8$ .

#### 4) Определить условные экстремумы функции

$$f(x, y) = x + 7y \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 10.$$

Данная задача является по сути задачей поиска экстремумов функции нескольких переменных при заданных условиях. Такие задачи обычно решаем одним из двух способов - или через функцию Лагранжа, или подстановкой зависимости, заданной в условии, в саму функцию. Но здесь область поиска экстремумов определена окружностью  $x^2 + y^2 = 10$  с центром в точке  $(0; 0)$ , а сама функция является плоскостью. За счёт этого можно существенно упростить решение задачи.

Для решения задачи используем [метод графической интерпретации](#).

► Очевидно, что в данном случае имеем два экстремума - один максимум и один минимум, в проекции на плоскость  $xOy$  являющиеся точками пересечения окружности  $x^2 + y^2 = 10$  и проекции прямой, лежащей в плоскости  $z = x + 7y$  и проходящей через точку  $(0; 0)$ . Направляющий вектор этой прямой:

$\vec{s} = \text{grad } f(x, y) = (1; 7)$  (ловим наибольший наклон плоскости). Так что точки экстремумов определим, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, & y_1 = \frac{7\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}, & y_2 = -\frac{7\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\max f = f\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{7\sqrt{5}}{5}\right) = 10\sqrt{5}$$

$$\min f = f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{7\sqrt{5}}{5}\right) = -10\sqrt{5}$$

Решение в Mathematica 7:

**Minimize**[**x** + 7 **y**, **x**^2 + **y**^2 == 10, {**x**, **y**}]

{-10  $\sqrt{5}$ , {x  $\rightarrow$   $\frac{49}{\sqrt{5}}$  - 10  $\sqrt{5}$ , y  $\rightarrow$   $-\frac{7}{\sqrt{5}}$ }}

**Maximize**[**x** + 7 **y**, **x**^2 + **y**^2 == 10, {**x**, **y**}]

{10  $\sqrt{5}$ , {x  $\rightarrow$   $-\frac{49}{\sqrt{5}}$  + 10  $\sqrt{5}$ , y  $\rightarrow$   $\frac{7}{\sqrt{5}}$ }}

Глобальный экстремум.

5) Исследовать функцию  $z = x^2 - xy + y^2$  на глобальный экстремум на множестве  $|x| + |y| \leq 1$ .

Абсолютные экстремумы (в экономике их называют глобальными экстремумами) - абсолютный минимум и абсолютный максимум - это соответственно наименьшее и наибольшее значения функции в указанной области.

Пусть функция определена и дифференцируема в ограниченной замкнутой области. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, надо:

- найти критические точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
- из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

**a)**

Находим стационарные точки, расположенные в указанной области, и вычисляем значения функции в них.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - xy + y^2)'_x = 2x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - xy + y^2)'_y = 2y - x$$

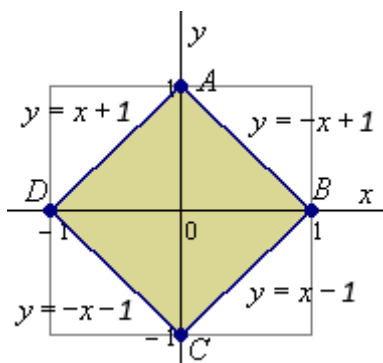
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- найденная точка находится в указанной области:  $(0; 0) \in D$ ;  $z(0; 0) = 0$ .

6)

Данная область представляет собой квадрат, назовём его  $ABCD$ :



На линиях, образующих границы области, находим наименьшее и наибольшее значения.

При  $y = -x + 1$  (граница  $AB$ ):  $z = 3x^2 - 3x + 1$

$$\frac{dz}{dx} = 6x - 3$$

$$6x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \in [0; 1]$$

$$z\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

На вершине квадрата  $A$ :

$$z(0; 1) = 1$$

На вершине квадрата  $B$ :

$$z(1; 0) = 1$$

При  $y = x - 1$  (граница  $BC$ ):  $z = x^2 - x + 1$

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 1$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \in [0; 1]$$

$$z\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

На вершине квадрата  $C$ :

$$z(0; -1) = 1$$

(значение функции на вершине квадрата  $B$  вычислено ранее)

При  $y = -x - 1$  (граница  $CD$ ):  $z = 3x^2 + 3x + 1$

$$\frac{dz}{dx} = 6x + 3$$

$$6x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \in [-1; 0]$$

$$z\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

На вершине квадрата  $D$ :

$$z(-1; 0) = 1$$

(значение функции на вершине квадрата  $C$  вычислено ранее)

При  $y = x + 1$  (граница  $DA$ ):  $z = x^2 + x + 1$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 1$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \in [-1; 0]$$

$$z\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

(значения функции на вершинах квадрата  $D$  и  $A$  вычислены ранее)

**в)**

Из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее значения.

$$\text{Наибольшее значение } M = f\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Наименьшее значение } m = f(0; 0) = 0.$$

**Ответ:** в указанной области функция имеет наибольшее значение  $M = f\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$   
и наименьшее значение  $m = f(0; 0) = 0$ .

6) Найти точки экстремумов функции  $f(x, y) = x + 7y$  на множестве:

$$\text{а) } X = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 16 \right\};$$

$$\text{б) } X = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x - y \leq 0, x + y \leq 4 \right\};$$

$$\text{в) } X = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x + y \leq 4, x + 7y \geq 0 \right\}.$$

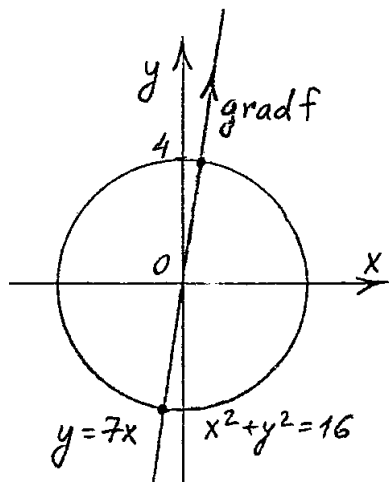
Дать геометрическое обоснование ответа.

**а)**

Здесь множество  $X$  является окружностью.

Данная задача является по сути задачей поиска экстремумов функции нескольких переменных при заданных условиях. Такие задачи обычно решаем одним из двух способов - или через функцию Лагранжа, или подстановкой зависимости, заданной в условии, в саму функцию. Но здесь область поиска экстремумов определена окружностью с центром в точке  $(0; 0)$ , а сама функция  $f(x, y)$  является плоскостью. За счёт этого можно существенно упростить решение задачи.

Очевидно, что в указанной области функция  $z(x, y)$  имеет два экстремума - один максимум и один минимум, которые и есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции. Эти экстремумы в проекции на плоскость  $xOy$  являются точками пересечения окружности  $x^2 + y^2 = 16$  и проекции прямой, лежащей в плоскости  $z = x + 7y$  и проходящей через точку  $(0; 0)$ . Направляющий вектор этой прямой:  $\vec{s} = \text{grad } f(x, y) = (1; 7)$  (соответствует наибольшему наклону плоскости).



Так что находим точки экстремумов функции, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, & y_1 = -\frac{14\sqrt{2}}{5} \\ x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}, & y_2 = \frac{14\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

$$\min f = f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}; -\frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = -20\sqrt{2}$$

$$\max f = f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = 20\sqrt{2}$$

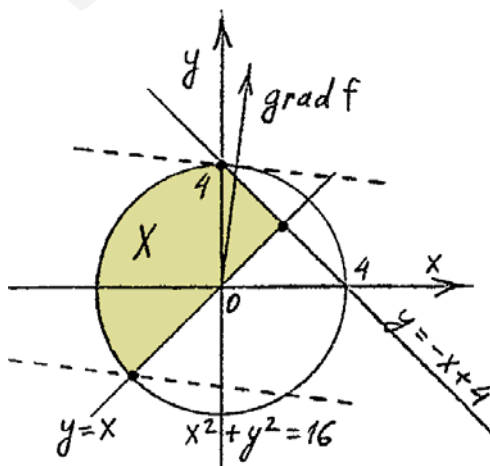
**Ответ:** на указанном множестве данная функция имеет два экстремума -

минимум  $f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}; -\frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = -20\sqrt{2}$

и максимум  $f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = 20\sqrt{2}$ .

**6)**

Здесь множество  $X$  является частью круга:



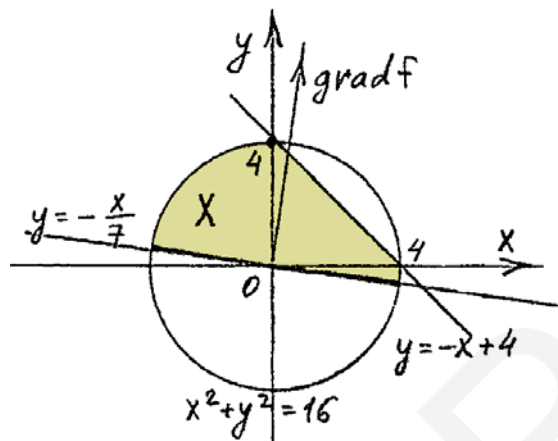
$$\min f = f(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2}$$

$$\max f = f(0; 4) = 28$$

**Ответ:** на указанном множестве данная функция имеет два экстремума - минимум  $f(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2}$  и максимум  $f(0; 4) = 28$ .

**В)**

Здесь множество  $X$  является частью круга:



$\max f = f(0; 4) = 28$ , но минимума не существует, т.к.  $\text{grad } f \perp \left(y = -\frac{1}{7}x\right)$ .

**Ответ:** на указанном множестве данная функция имеет один экстремум - максимум  $f(0; 4) = 28$ .

### Линии и поверхности уровня.

7) Для функции  $z = f(x, y) = x^2 - 2y$  изобразить на плоскости  $R^2$  линии уровня

$$L_a(f) = \{(x, y): f(x, y) = a\}, \quad a \in R.$$

Выделить линию уровня, проходящую через точку  $P_0(4; 4)$ . Найти градиент поля в этой точке. Проверить ортогональность  $\text{grad } L(P_0)$  и касательной прямой к выделенной линии уровня в точке  $P_0$ .

Построим линии уровня, соответствующие значениям  $a \in \{-16; -8; 0; 8; 16\}$ . Их уравнения:

$$a = -16: \quad y = \frac{x^2}{2} + 8$$

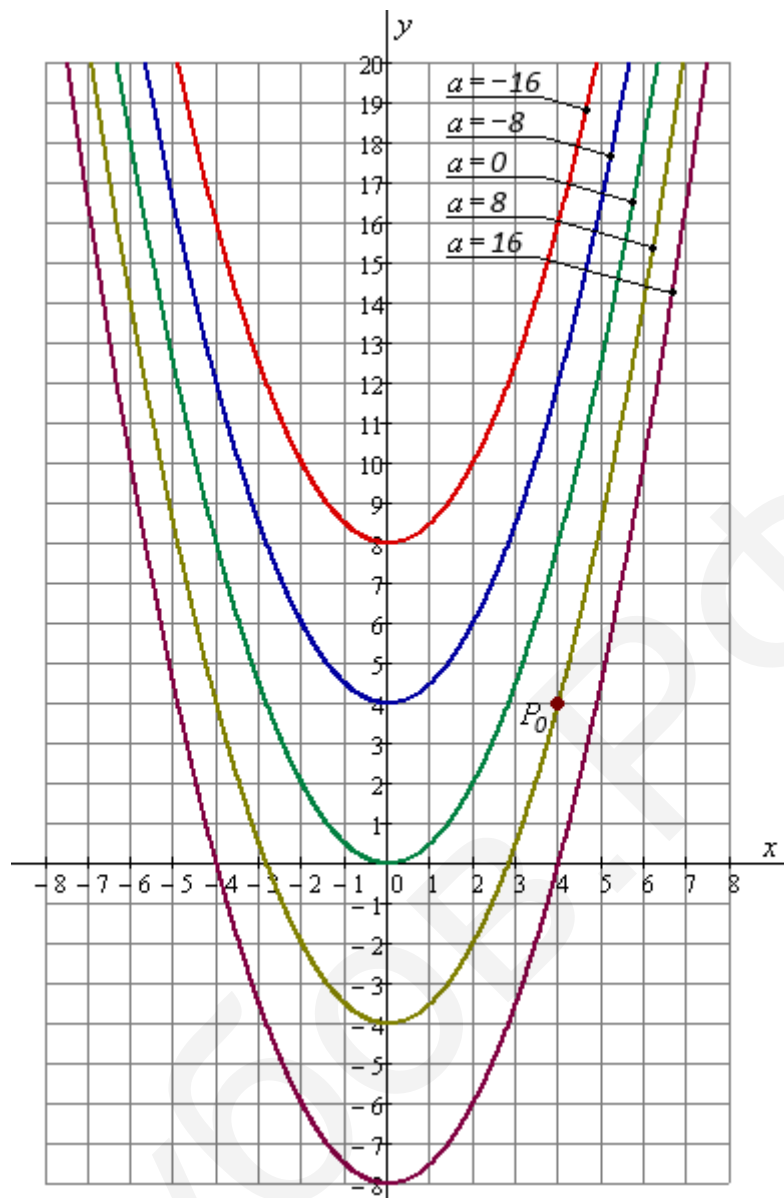
$$a = -8: \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$$

$$a = 0: \quad y = \frac{x^2}{2}$$

$$a = 8: \quad y = \frac{x^2}{2} - 4$$

$$a = 16: \quad y = \frac{x^2}{2} - 8$$





В произвольной точке  $P(x; y)$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 2y)'_x = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 2y)'_y = -2$$

$$\text{grad}(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = \left( \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (2x; -2)$$

В точке  $P_0(4; 4)$ :

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} = 8$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} = -2$$

$$\text{grad}(z) \big|_{P_0} = 8\vec{i} - 2\vec{j} = (8; -2)$$

Обозначим  $b$  касательную к линии уровня  $y = \frac{x^2}{2} - 4$ , содержащей точку  $P_0(4; 4)$ ; её уравнение

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)$$

$$y - 4 = 4 \cdot (x - 4)$$

$$4x - y - 12 = 0$$

т.е. нормаль к данной линии уровня в точке  $P_0(4; 4)$ :

$$\vec{n} = (4; -1)$$

Поскольку координаты  $\text{grad}(z)|_{P_0} = (8; -2)$  и  $\vec{n} = (4; -1)$  пропорциональны, то  $\text{grad} L(P_0) \perp b$ .

8) Для функции  $u = u(x, y, z)$  построить поверхности уровня  $\Pi_c = \{(x, y, z): u(x, y, z) = c\}$  для значений  $c \in \{1; 2\}$ . Найти направление и скорость наибольшего возрастания (убывания) функции

$$u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(z-1)^2} \text{ в точке } P_0(6; 8; 6).$$

При  $c = 1$ :

$$(z-1)^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(z-1)^4 = x^2 + y^2$$

В сечениях  $z = \text{const}$  получаем окружности; например при  $z = 0$  имеем  $x^2 + y^2 = 1$ ;  
в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$  получаем сдвоенные параболы,  
в сечениях  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  получаем линии, близкие по форме к сдвоенным параболом.

При  $c = 2$ :

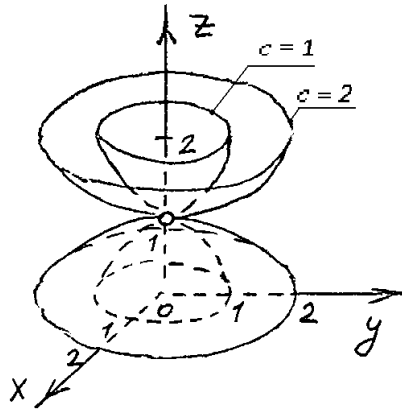
$$2(z-1)^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$4(z-1)^4 = x^2 + y^2$$

В сечениях  $z = \text{const}$  получаем окружности; например при  $z = 0$  имеем  $x^2 + y^2 = 4$ ;  
в сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$  получаем сдвоенные параболы,  
в сечениях  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$  получаем линии, близкие по форме к сдвоенным параболом.

Во всех случаях точка  $(0; 0; 1)$  - выколота.

Эскиз поверхностей уровня (поверхности условно обрезаны плоскостями  $z = 0$  и  $z = 2$ ):



Направление и скорость наибольшего изменения функции - это направление градиента и модуль градиента в указанной точке.

В произвольной точке  $P(x; y; z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(z-1)^2} \right)'_x = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{(z-1)^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(z-1)^2} \right)'_y = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{(z-1)^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(z-1)^2} \right)'_z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{(z-1)^3} = -\frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{(z-1)^3}$$

В точке  $P_0(6; 8; 6)$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} = \frac{6}{(6-1)^2 \sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{3}{125}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} = \frac{8}{(6-1)^2 \sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{4}{125}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0} = -\frac{2\sqrt{6^2 + 8^2}}{(6-1)^3} = -\frac{4}{25}$$

Градиент функции в произвольной точке  $P(x; y; z)$ :

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

Градиент функции в точке  $P_0(6; 8; 6)$ :

$$\text{grad}(u)|_{P_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0} \vec{k} = \frac{3}{125} \cdot \vec{i} + \frac{4}{125} \cdot \vec{j} - \frac{4}{25} \cdot \vec{k}$$

Модуль градиента в точке  $P_0(6; 8; 6)$ :

$$|\text{grad}(u)|_{P_0}| = \sqrt{\left(\frac{3}{125}\right)^2 + \left(\frac{4}{125}\right)^2 + \left(-\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{25}$$