Обратная функция.

1) Для указанной функции найдите обратную, если она существует

$$y=\begin{cases}-x^2 & при\ x<0\\ 2x & при\ x\geq 0\end{cases}$$

Любая строго монотонная функция имеет обратную.

Строго монотонными называются функции возрастающие и убывающие на множестве D (D - область определения функции).

Пусть функция определена на множестве D и пусть $D_1 \subset D$. Если $\forall x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется возрастающей на множестве D_1; $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей на множестве D_1.

Данная функция является строго возрастающей $\forall x \in R$, т.к. $\forall x_1, x_2 \in R\ :\ x_1 < x_2\ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$. Следовательно, для неё существует обратная функция. Найдём её.

► При $x<0$:

$$y=-x^2$$

$$x^2=-y$$

$$x=-\sqrt{-y} \qquad (y<0)$$

Заменив в записи переменную x на y, а y на x, запишем обратную функцию:

$$y=-\sqrt{-x}\ .$$

► При $x\geq 0$:

$$y=2x$$

$$x=\frac{1}{2}y$$

Обратная функция:

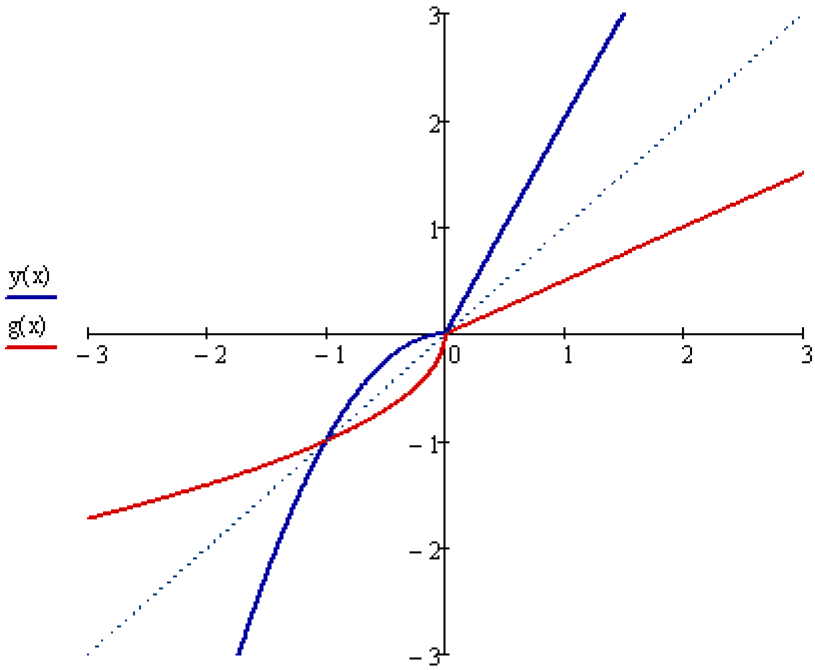
$$y=x/2\ .$$

Запишем обратную функцию:

$$y=\begin{cases}-\sqrt{-x} & при\ x<0\\ x/2 & при\ x\geq 0\end{cases}$$

Визуальная проверка в Mathcad 14:

$$y(x) := \begin{cases} (2x) & \text{if } x \ge 0 \\ \left(-x^2\right) & \text{if } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{if } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{if } x \ge 0 \end{cases}$$



- графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 123;
2) Ильин В.А., Куркина А.В. "Высшая математика", 2005, стр. 196.

Сложная функция.

Разбирая сложную функцию, рассматриваем по нисходящей все композиции функций, включенных в неё (такой подход, например, используем при вычислении производных от сложных функций). Разбирая элементарные функции, рассматриваем одновременно с композициями и все применённые к основным элементарным функциям арифметические операции.

Заметим, что отношение сложной функции по определению является двухместным отношением.

2) Расшифровать сложную функцию $y = \ln\left(\sin\left(7x\right)\right)$.

► Функция $y = \ln\left(\sin\left(7x\right)\right)$ является сложной функцией, или суперпозицией (композицией) функций:

сложной функции $g\left(x\right) = \sin\left(7x\right)$,

функции натурального логарифма $f\left(g\right) = \ln\left(g\right)$.

Итак, $y\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right)$ или $y = f \circ g$.

► Функция $g(x)=\sin(7x)$ представляет собой композицию функций:

линейной функции $\varphi(x)=7x$,

тригонометрической функции $\gamma(\varphi)=\sin(\varphi)$.

Итак, $g(x)=\gamma(\varphi(x))$ или $g=\gamma\circ\varphi$.

Тригонометрическая, логарифмическая и линейная функции являются основными элементарными функциями.

Функция $y=\ln(\sin(7x))$ также является элементарной функцией, т.к. она получена из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций.

Литература:

1) Ильин В.А., Куркина А.В. “Высшая математика”, 2005, стр. 200;
2) Кремер Н.Ш. “Высшая математика для экономических специальностей”, части 1 и 2, 2006, стр. 250;
3) Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. "Курс математического анализа", 2003, страница 62;
4) Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. "Высшая математика для экономистов", 2000, страницы 128...132.

3) Расшифровать сложную функцию $y=\sqrt[3]{8+x^4}$.

► Функция $y=\sqrt[3]{8+x^4}$ является сложной функцией, или суперпозицией (композицией) функций:

сложной функции $g(x)=8+x^4$,

степенной функции $f(g)=\sqrt[3]{g}$.

Итак, $y(x)=f(g(x))$ или $y=f\circ g$.

► Функция $g(x)=8+x^4$ является элементарной функций (она получена из основных элементарных функций: постоянной (8) и степенной (x^4), связанных арифметической операцией сложения):

постоянной $\varphi(x)=8$,

степенной функции $\gamma(x)=x^4$.

3) Определить композиции функций $f(x)=\log_3(x-1)$ и $g(x)=x^2-x$:

$f(f(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$

$$f(f(x))=\log_3(\log_3(x-1)-1)$$

$$f(g(x))=\log_3(x^2-x-1)$$

$$g(f(x))=\log_3^2(x-1)-\log_3(x-1)=\log_3(x-1)\cdot(\log_3(x-1)-1)$$

$$g(g(x))=(x^2-x)^2-(x^2-x)=x^4-2\cdot x^3+x$$