

1) Исследовать функцию на непрерывность

$$f(x) = \begin{cases} -|x+2| & , & x < -1 \\ x^2 + 1 & , & -1 \leq x < 1 \\ -x + 3 & , & x \geq 1 \end{cases}$$

На промежутках $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ кусочно-заданная функция непрерывна как состоящая из элементарных функций. Проверим её на непрерывность в точках $x = \pm 1$ с помощью односторонних пределов.

В точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-|x+2|) = -1$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

- в точке $x = -1$ функция имеет **разрыв 1-го рода**; скачок функции в этой точке равен $\delta = 2 - (-1) = 3$.

В точке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2$$

$$f(1) = -1 + 3 = 2$$

- в точке $x = 1$ функция **непрерывна**.

2) Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, & \text{при } x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{|x|}{x}, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их характер.

Построить схематический график функции.

► Поскольку при $x > 0$: $\frac{|x|}{x} = 1$, то формулу функции можно переписать в виде:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1}, & \text{при } x < -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{при } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

► Область определения функции: $x \in \mathbb{R}$.

Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точках $x = -1$, $x = 0$ с помощью односторонних пределов.

В точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} -\frac{1}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \sqrt{1-x^2} = 0$$

- в точке $x = -1$ функция имеет **точку разрыва 2-го рода**.

В точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1$$

- в точке $x = 0$ функция **непрерывна**.

► Для построения графика вычислим несколько характерных точек функции.

$$x < -1: \quad y = -\frac{1}{x+1}$$

x	-3	-2	-1,5
y	1/2	1	2

$$-1 \leq x \leq 0: \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

x	-1	-0,8	0
y	0	0,6	1

