

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = 2x^2 - 12x - 1$ на отрезке $[2; 6]$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, надо:

а) найти стационарные точки, расположенные на данном отрезке, и вычислить значения функции в этих точках;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на краях отрезка;

в) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

► Рассматриваемая функция на данном отрезке определена и непрерывна.

► Находим стационарные точки, расположенные на данном отрезке.

$$y' = (2x^2 - 12x - 1)' = 4x - 12$$

$$y' = 0$$

$$4x - 12 = 0$$

$$x = 3 \in [2; 6]$$

$$y(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 - 1 = -19$$

► На краях отрезка:

$$y(2) = 2 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 1 = -17$$

$$y(6) = 2 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 - 1 = -1$$

► Итак, на отрезке $[2; 6]$ наибольшее значение функции $y(6) = -1$, наименьшее значение функции $y(3) = -19$.

2) Найти абсолютный экстремум функции

$$z = f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$$

в замкнутой области D , заданной системой неравенств

$$D: \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Абсолютные экстремумы (в экономике их называют глобальными экстремумами) - абсолютный минимум и абсолютный максимум - это соответственно наименьшее и наибольшее значения функции в указанной области.

Пусть функция определена и дифференцируема в ограниченной замкнутой области. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, надо:

а) найти критические точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

в) из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

a)

Находим стационарные точки, расположенные в указанной области, и вычисляем значения функции в них.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 + 2xy - y^2 + 4x)'_x = 2x + 2y + 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + 2xy - y^2 + 4x)'_y = 2x - 2y$$

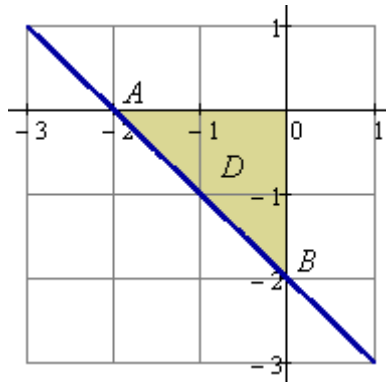
$$\begin{cases} 2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

- найденная точка находится в указанной области: $(-1; -1) \in D$; $z(-1; -1) = -2$.

6)

Данная область представляет собой треугольник, назовём его $\triangle AOB$:



На линиях, образующих границы области, находим наименьшее и наибольшее значения.

При $x = 0$ (граница OB): $z = -y^2$

$$\frac{dz}{dy} = -2y$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0 \in [-2; 0]$$

$$z(0; 0) = 0 \text{ (точка попала на вершину } O \text{)}$$

На вершине прямоугольника B :

$$z(0; -2) = -4$$

При $y = 0$: $z = x^2 + 4x$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 4$$

$$2x + 4 = 0$$

$$x = -2 \in [-2; 0]$$

$$z(-2; 0) = -4 \text{ (точка попала на вершину } A \text{)}$$

(значение функции на вершине треугольника O ранее)

При $y = -x - 2$: $z = -2x^2 - 12x - 4$

$$\frac{dz}{dx} = -4x - 12$$

$$-4x - 12 = 0$$

$$x = -3 \notin [-2; 0]$$

(значения функции на вершинах треугольника A и B вычислены ранее)

в)

Из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее значения.

Наибольшее значение $M = f(0; 0) = 0$.

Наименьшее значение $m = f(-2; 0) = f(0; -2) = -4$.

Ответ: в указанной области функция имеет наибольшее значение $M = f(0; 0) = 0$

и наименьшее значение $m = f(-2; 0) = f(0; -2) = -4$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 323.

3) Найти точки экстремумов функции $f(x, y) = x + 7y$ на множестве:

а) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$;

б) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x - y \leq 0, x + y \leq 4\}$;

в) $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16, x + y \leq 4, x + 7y \geq 0\}$.

Дать геометрическое обоснование ответа.

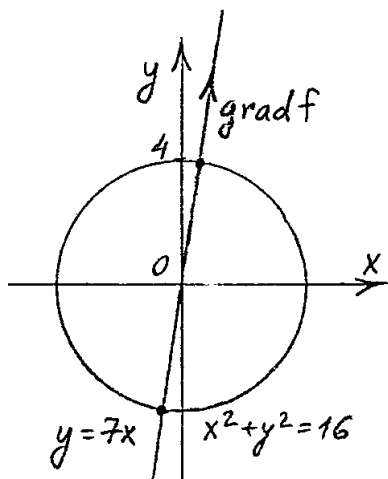
а)

Здесь множество X является окружностью.

Данная задача является по сути задачей поиска экстремумов функции нескольких переменных при заданных условиях. Такие задачи обычно решаем одним из двух способов - или через функцию Лагранжа, или подстановкой зависимости, заданной в условии, в саму функцию. Но здесь область поиска экстремумов определена окружностью с центром в точке $(0; 0)$, а сама функция $f(x, y)$ является плоскостью. За счёт этого решение задачи существенно упрощается.

Очевидно, что в указанной области функция $z(x, y)$ имеет два экстремума - один максимум и один минимум, которые и есть соответственно наибольшее и наименьшее значения функции. Эти экстремумы в проекции на плоскость xOy являются точками пересечения окружности $x^2 + y^2 = 16$ и проекции прямой, лежащей в плоскости $z = x + 7y$ и проходящей через точку $(0; 0)$. Направляющий вектор этой прямой:

$\vec{s} = \text{grad } f(x, y) = (1; 7)$ (соответствует наибольшему наклону плоскости).



Так что находим точки экстремумов функции, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}, & y_1 = -\frac{14\sqrt{2}}{5} \\ x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{5}, & y_2 = \frac{14\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

$$\min f = f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}; -\frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = -20\sqrt{2}$$

$$\max f = f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = 20\sqrt{2}$$

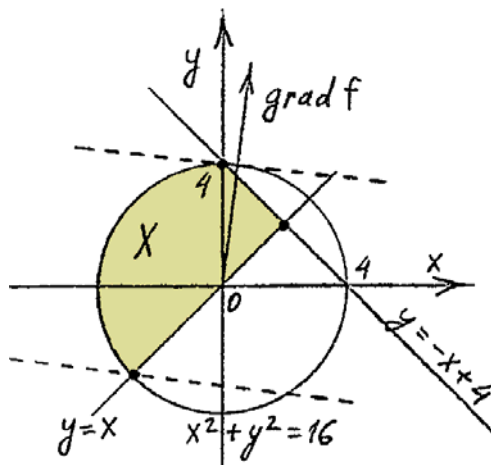
Ответ: на указанном множестве данная функция имеет два экстремума -

минимум $f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}; -\frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = -20\sqrt{2}$

и максимум $f\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}; \frac{14\sqrt{2}}{5}\right) = 20\sqrt{2}$.

6)

Здесь множество X является частью круга:



$$\min f = f(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2}$$

$$\max f = f(0; 4) = 28$$

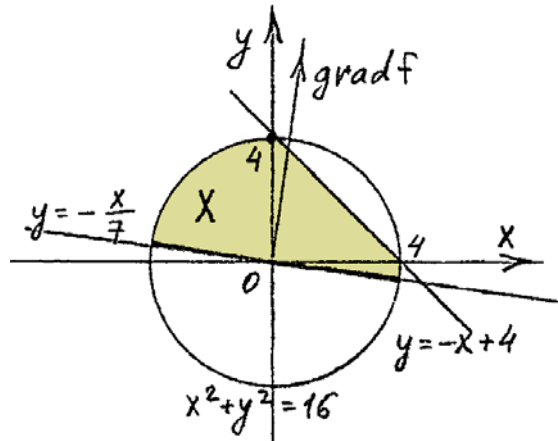
Ответ: на указанном множестве данная функция имеет два экстремума -

минимум $f(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = -16\sqrt{2}$

и максимум $f(0; 4) = 28$.

В)

Здесь множество X является частью круга:



$\max f = f(0; 4) = 28$, но минимума не существует, т.к. $\text{grad } f \perp \left(y = -\frac{1}{7}x\right)$.

Ответ: на указанном множестве данная функция имеет один экстремум - максимум $f(0; 4) = 28$.