

1) Найти экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 36xy$

Определим стационарные точки из условия

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(необходимое условие существования экстремума)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 36y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 36x$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 36y = 0 \\ 4y^3 - 36x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -3 \\ x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ x_3 = 3 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

Точки $P_1(-3; -3)$, $P_2(0; 0)$ и $P_3(3; 3)$ - стационарные точки; проверим их на соответствие достаточному условию наличия экстремума. Для этого из вторых производных функции составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 \end{array} \right] \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 12x^2 & -36 \\ -36 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим поведение матрицы Гессе в найденных стационарных точках.

$$P_1(-3; -3): H(P_1) = \begin{pmatrix} 108 & -36 \\ -36 & 108 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = 108 > 0$,

$$M_2 = 108 \cdot 108 - (-36) \cdot (-36) = 10368 > 0.$$

Поскольку $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 > 0 \end{cases}$, то в точке P_1 функция имеет минимум $z(-3; -3) = -162$.

$$P_2(0;0): \quad H(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = 0$, поэтому необходимы дополнительные исследования для выявления экстремума.

Сделаем сечение поверхности плоскостью $y = kx$ ($k \in R$), проходящей через исследуемую точку $(0;0)$ параллельно оси Oz . Изменяя величину k , вращаем секущую плоскость относительно оси Oz , сканируя поверхность. В сечении получается линия $z(x)$:

$$z = x^4 + k^4 x^4 - 36kx^2$$

$$z = (1 + k^4)x^4 - 36kx^2$$

$$z' = 4(1 + k^4)x^3 - 72kx$$

$$z'' = 12(1 + k^4)x^2 - 72k$$

- при $x = 0$ выпуклость линии сечения может быть и вниз и вверх, в зависимости от знака коэффициента k ($z'' = -72k$). Следовательно, в точке $(0;0)$ функция $z(x, y)$ экстремума **не имеет**.

В общем случае может ещё потребоваться сечение поверхности плоскостью $x = 0$ (плоскость $y = kx$ при $k \rightarrow \pm\infty$).

$$P_3(3;3): \quad H(P_3) = \begin{pmatrix} 108 & -36 \\ -36 & 108 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = 108 > 0$,

$$M_2 = 108 \cdot 108 - (-36) \cdot (-36) = 10368 > 0.$$

Поскольку $\begin{cases} M_1 > 0 \\ M_2 > 0 \end{cases}$, то в точке P_3 функция имеет **минимум** $z(3;3) = -162$.

Ответ: функция имеет два минимума $z(-3; -3) = z(3; 3) = -162$.

2) Найти экстремумы функции двух переменных

$$z = xy(x-2)(y-2)$$

$$z = xy(x-2)(y-2) = x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 4xy$$

Определим стационарные точки из условия

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(**необходимое** условие существования экстремума)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 - 2y^2 - 4xy + 4y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 2x^2 - 4xy + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2y^2 - 4xy + 4y = 0 \\ 2x^2y - 2x^2 - 4xy + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & y_1 = 0 \\ x_2 = 0, & y_2 = 2 \\ x_3 = 2, & y_3 = 0 \\ x_4 = 1, & y_4 = 1 \\ x_5 = 2, & y_5 = 2 \end{cases}$$

- найдено 5 стационарных точек: $P_1(0;0)$, $P_2(0;2)$, $P_3(2;0)$, $P_4(1;1)$, $P_5(2;2)$; проверим их на соответствие **достаточно** условию наличия экстремума. Для этого из вторых производных функции составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 - 4y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy - 4y - 4x + 4 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 - 4x \end{array} \right] \Rightarrow G = \begin{pmatrix} 2y^2 - 4y & 4xy - 4y - 4x + 4 \\ 4xy - 4y - 4x + 4 & 2x^2 - 4x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим поведение матрицы Гессе в найденных стационарных точках.

► $P_1(0;0)$: $H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$;

угловые миноры: $M_1 = 0$,
 $M_2 = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16 < 0$.

Поскольку $M_2 < 0$, то функция в рассматриваемой точке **не имеет** экстремума.

► $P_2(0;2)$: $H(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

угловые миноры: $M_1 = 0$,
 $M_2 = 0 \cdot 0 - (-4) \cdot (-4) = 16 > 0$.

Поскольку $\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 > 0 \end{cases}$, то требуется **дополнительное исследование** для установления факта экстремумов функции в рассматриваемой точке.

Сделаем сечение поверхности плоскостью $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$), проходящей через исследуемую точку $(0;2)$ параллельно оси Oz . Изменяя величину k , вращаем секущую плоскость относительно оси Oz , сканируя поверхность. В сечении получается линия $z(x)$:

$$z = k^2 x^4 - 2kx^3 - 2k^2 x^3 + 4kx^2$$

$$z = k^2 x^4 - 2k(1+k)x^3 + 4kx^2$$

$$z' = 4k^2 x^3 - 6k(1+k)x^2 + 8kx$$

$$z'' = 12k^2 x^2 - 12k(1+k)x + 8k$$

$$z''(0;2) = 8k$$

- при $x = 0$ выпуклость линии сечения может быть и вниз и вверх, в зависимости от знака коэффициента k ($z'' = 8k$). Следовательно, в точке $(0; 2)$ функция $z(x, y)$ экстремумов **не имеет**.

В общем случае может ещё потребоваться сечение поверхности плоскостью $x = 0$ (плоскость $y = kx$ при $k \rightarrow \pm\infty$).

$$\blacktriangleright P_3(2;0): \quad H(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = 0$,

$$M_2 = 0 \cdot 0 - (-4) \cdot (-4) = 16 > 0.$$

Поскольку $\begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 > 0 \end{cases}$, то требуется **дополнительное исследование** для установления факта экстремумов функции в рассматриваемой точке.

Сделаем сечение поверхности плоскостью $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$, проходящей через исследуемую точку $(x_0; y_0) = (2; 0)$ параллельно оси Oz : $y = k(x - 2)$ ($k \in \mathbb{R}$). Изменяя величину k , вращаем секущую плоскость относительно оси Oz , сканируя поверхность. В сечении получается линия $z(y)$:

$$z = x^2 k^2 (x - 2)^2 - 2x^2 k (x - 2) - 2x k^2 (x - 2)^2 + 4x k (x - 2)$$

$$z = k^2 x^4 - 2k(3k - 1)x^3 + 4kx^2(3k + 2) - 8kx(k + 1)$$

$$z' = 4k^2 x^3 - 6k(3k - 1)x^2 + 8k(3k + 2)x - 8k(k + 1)$$

$$z'' = 12k^2 x^2 - 12k(3k - 1)x + 8k(3k + 2)$$

$$z''(2; 0) = 40k$$

- в точке $(2; 0)$ выпуклость линии сечения может быть или вниз или вверх, в зависимости от знака коэффициента k ($z'' = 40k$). Следовательно, в точке $(2; 0)$ функция $z(x, y)$ экстремумов **не имеет**.

В общем случае может ещё потребоваться сечение поверхности плоскостью $x = 2$ (плоскость $y = k(x - 2)$ при $k \rightarrow \pm\infty$).

$$\blacktriangleright P_4(1;1): \quad H(P_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

угловые миноры: $M_1 = -2 < 0$,

$$M_2 = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = 4 > 0.$$

Поскольку $\begin{cases} M_1 < 0 \\ M_2 > 0 \end{cases}$, то функция в данной точке имеет **максимум** $z(1; 1) = 1$.

$$\blacktriangleright P_5(2;2): \quad H(P_5) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix};$$

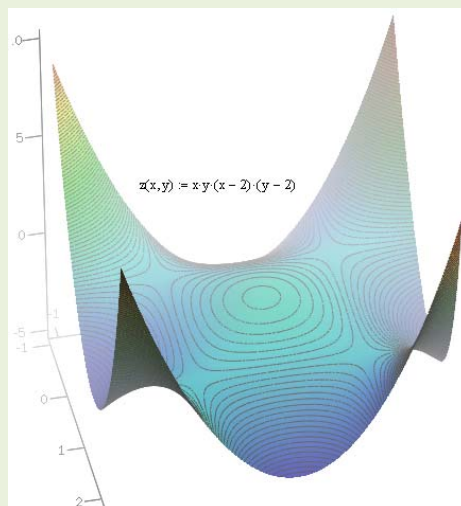
угловые миноры: $M_1 = 0$,

$$M_2 = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16 < 0.$$

Поскольку $M_2 < 0$, то функция в рассматриваемой точке **не имеет** экстремума.

Ответ: функция имеет максимум $z(1; 1) = 1$.

Сделаем картинку поверхности в Mathcad 14:



- изображён фрагмент поверхности, на котором хорошо видны 4 стационарных точки и одна точка максимума.

3) Исследовать функцию на экстремум:

$$z = 3x^2y - x^3 - y^4 + 2.$$

$$z'_x = (3x^2y - x^3 - y^4 + 2)'_x = 6xy - 3x^2$$

$$z'_y = (3x^2y - x^3 - y^4 + 2)'_y = 3x^2 - 4y^3$$

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy - x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Найдены две стационарных точки $P_1(0;0)$, $P_2(6;3)$. Проверим выполнение достаточных условий наличия экстремума в данных точках.

$$A = z''_{xx} = (6xy - 3x^2)'_x = 6y - 6x$$

$$B = z''_{xy} = (6xy - 3x^2)'_y = 6x$$

$$C = z''_{yy} = (3x^2 - 4y^3)'_y = -12y^2$$

► В точке $P_1(0;0)$:

$$A = 0$$

$$B = 0$$

$$C = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- в точке $P_1(0;0)$ имеем $\Delta = 0$, поэтому необходимы дополнительные исследования для выявления экстремума.

В сечении поверхности плоскостью $y = 0$ получаем линию

$$z(x) = -x^3 + 2$$

- при отрицательных x значения функции будут больше величины $z(0;0) = 2$, а при положительных x значения функции будут меньше величины $z(0;0) = 2$; следовательно, в точке $(0;0)$ функция $z(x, y)$ экстремума **не имеет**.

► В точке $P_2(6;3)$:

$$A = -18 < 0$$

$$B = 36$$

$$C = -108$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{vmatrix} = 1944 - 1296 = 648 > 0$$

- в точке $P_2(6;3)$ **максимум**, т.к. $\begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. Значение функции в этой точке $z(6;3) = 29$.

Ответ: функция имеет максимум $z(6;3) = 29$.