

1) Масса (в граммах) в тонком неоднородном стержне распределяется по закону $m(l) = 4l^2 - 6l + 9$ (l - расстояние от начала стержня до любой его точки в см). Найдите плотность стержня на расстоянии 2 см от начала стержня.

$$\rho(l) = m'(l) = (4l^2 - 6l + 9)' = 8l - 6$$

$$\rho(2) = 8 \cdot 2 - 6 = 10 \text{ (г/см)}$$

2) Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$ (x - расстояние от начала координат в метрах, t - время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 5 секунд после начала движения.

$$E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$$

$$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1$$

$$E(t) = \frac{m \cdot (2t + 1)^2}{2}$$

$$E(5) = \frac{4 \cdot (2 \cdot 5 + 1)^2}{2} = 242 \text{ (Дж)}$$

3) На сколько увеличится при нагревании объём куба, ребро которого равно 10 см, если удлинение ребра куба равно 0,03 см ?

Обозначим:

x - ребро куба;

Δx - изменение длины ребра куба.

Объём куба можно представить как функцию $V(x) = x^3$.

Поскольку изменение ребра куба мало, приближённое вычисление изменения объёма куба через дифференциал функции $V(x)$ даст достаточно точный результат.

Полагаем $x_0 = 10$, тогда $\Delta x = 0,03$.

$$\Delta V \approx dV = (x^3)' \cdot \Delta x = (3x^2) \cdot \Delta x$$

$$\Delta V \Big|_{\substack{x=10 \\ \Delta x=0,03}} \approx (3 \cdot 10^2) \cdot 0,03 = 9 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\Delta V \approx 9 \text{ см}^3$.

4) На сколько увеличится при нагревании объём шара, радиус которого равен 10 см, если удлинение радиуса шара равно 0,02 см ?

Обозначим:

x - радиус шара;

Δx - изменение радиуса шара.

Объём шара можно представить как функцию $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$.

Поскольку изменение радиуса шара мало, приближённое вычисление изменения объёма шара через дифференциал функции $V(x)$ даст достаточно точный результат.

Полагаем $x_0 = 10$, тогда $\Delta x = 0,02$.

$$\Delta V \approx dV = \left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)' \cdot \Delta x = 4\pi x^2 \cdot \Delta x$$

$$\Delta V \Big|_{\substack{x=10 \\ \Delta x=0,02}} \approx 4\pi \cdot 10^2 \cdot 0,02 = 8\pi \approx 25,133 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\Delta V \approx 25,133 \text{ см}^3$.

5) Найти, на сколько увеличится площадь квадрата при увеличении его стороны на 0,01 см, если сторона квадрата равна 5 см.

Обозначим:

x - сторона квадрата;

Δx - изменение стороны квадрата.

Площадь квадрата можно представить как функцию $S(x) = x^2$.

Поскольку изменение стороны квадрата мало, приближённое вычисление изменения площади квадрата через дифференциал функции $S(x)$ даст достаточно точный результат.

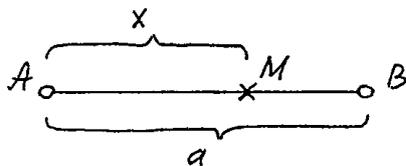
Полагаем $x_0 = 5$, тогда $\Delta x = 0,01$.

$$\Delta S \approx dS = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x$$

$$\Delta S \Big|_{\substack{x=5 \\ \Delta x=0,01}} \approx 2 \cdot 5 \cdot 0,01 = 0,1 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $\Delta S \approx 0,1 \text{ см}^2$.

6) На прямолинейном отрезке AB , соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку M , освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещённость обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)



Освещённость в точке M от источника A составляет $s_A = \frac{p}{x^2}$;

освещённость в точке M от источника B составляет $s_B = \frac{q}{(a-x)^2}$.

Суммарное освещение в точке M :

$$s(x) = s_A + s_B = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2}$$

Найдём экстремумы функции $s(x)$ на промежутке $(0; a)$.

$$s'(x) = \left(\frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2} \right)' = (px^{-2} + q(a-x)^{-2})' = -2px^{-3} - 2q(a-x)^{-3} \cdot (-1) = -\frac{2p}{x^3} + \frac{2q}{(a-x)^3}$$

$$s'(x) = 0$$

$$-\frac{2p}{x^3} + \frac{2q}{(a-x)^3} = 0$$

$$\frac{q}{(a-x)^3} = \frac{p}{x^3}$$

$$(a-x)^3 = \frac{q}{p} x^3$$

$$a-x = \sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot x$$

$$\sqrt[3]{\frac{q}{p}} \cdot x + x = a$$

$$x \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{q}{p}} + 1 \right) = a$$

$$x = \frac{a}{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{q}{p}} \right)}$$

Найденная точка является точкой минимума функции, т.к. из формулы $s(x) = \frac{p}{x^2} + \frac{q}{(a-x)^2}$ видно, что в момент начала удаления от любого источника освещённость от него резко падает, в то время как доля освещённости от другого источника прибывает сначала медленно.

Ответ: освещённость слабее всего будет в точке, удалённой от источника a на расстояние $x = \frac{a}{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{q}{p}} \right)}$.

7) Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = e^{5x+6y} + \sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$ в окрестности точки $M_0(-6; 5; 1)$.

Линеаризовать функцию $f(x, y, z)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - значит приближённо представить её в виде:

$$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{df}{dy} \right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left. \frac{df}{dz} \right|_{M_0} \cdot (z - z_0)$$

Значение функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 :

$$f(-6; 5; 1) = e^{5 \cdot (-6) + 6 \cdot 5} + \sin\left(\frac{-6 + 5 + 1}{5}\right) = e^0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

Частные производные функции $f(x, y, z)$:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{M_0} = \left(e^{5x+6y} + \sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right) \right)'_x = 5e^{5x+6y} + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{M_0} = \left(e^{5x+6y} + \sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right) \right)'_y = 6e^{5x+6y} + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{M_0} = \left(e^{5x+6y} + \sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right) \right)'_z = \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$$

Частные производные функции $f(x, y, z)$ в точке M_0 :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{M_0} = 5 \cdot e^{5 \cdot (-6) + 6 \cdot 5} + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{-6 + 5 + 1}{5}\right) = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{M_0} = 6 \cdot e^{5 \cdot (-6) + 6 \cdot 5} + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{-6 + 5 + 1}{5}\right) = 6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{M_0} = \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{-6 + 5 + 1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

Линеаризованное представление функции $f(x, y, z) = e^{5x+6y} + \sin\left(\frac{x+y+z}{5}\right)$ в окрестности точки

$M_0(-6; 5; 1)$:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\approx 1 + \frac{26}{5} \cdot (x + 6) + \frac{31}{5} \cdot (y - 5) + \frac{1}{5} \cdot (z - 1) = \\ &= 1 + \frac{26}{5}x + \frac{26 \cdot 6}{5} + \frac{31}{5}y - \frac{31 \cdot 5}{5} + \frac{1}{5}z - \frac{1}{5} = \\ &= \frac{26}{5}x + \frac{31}{5}y + \frac{1}{5}z + 1 \end{aligned}$$

Ответ: $f(x, y, z) \approx \frac{26}{5}x + \frac{31}{5}y + \frac{1}{5}z + 1$.