1) Вывести формулу производной функции $y = \log_a x$.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \log_a x$$

$$y(x + \Delta x) = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \left[\frac{\Delta x}{x} = t \right. \\ &\quad \left. \Delta x \rightarrow 0: t \rightarrow 0 \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \log_a \left((1+t)^{\frac{1}{t}} \right)^{\frac{1}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \end{aligned}$$

2) Найти производную функции $y = \sqrt{14^x}$, пользуясь лишь определением производной.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \sqrt{14^x} = 14^{\frac{x}{2}}$$

$$y(x + \Delta x) = 14^{\frac{x + \Delta x}{2}}$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 14^{\frac{x + \Delta x}{2}} - 14^{\frac{x}{2}} = 14^{\frac{x}{2}} \cdot 14^{\frac{\Delta x}{2}} - 14^{\frac{x}{2}} = 14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(14^{\frac{\Delta x}{2}} - 1 \right)$$

Следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(14^{\frac{\Delta x}{2}} - 1 \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{14^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2} \cdot \ln 14 \right)}{\Delta x} = \frac{\ln 14}{2} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$$

(при вычислении предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \rightarrow 0$).

3) Найти производную функции $y = \sin(19x)$, пользуясь лишь определением производной.

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \sin(19x)$$

$$y(x + \Delta x) = \sin(19 \cdot (x + \Delta x))$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sin(19 \cdot (x + \Delta x)) - \sin(19x) = 2 \cos\left(\frac{38x + \Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{19 \cdot \Delta x}{2}\right)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(19x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{19 \cdot \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(19x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{19 \cdot \Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{19 \cdot \Delta x}{2}\right)} \cdot 19 = \cos(19x) \cdot 1 \cdot 19 = 19 \cdot \cos(19x) \end{aligned}$$

(при вычислении предела использованы:

тригонометрическая формула $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

и первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

4) Пользуясь определением производной, найти производную функции

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Вычислим

$$y(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = \frac{\left((x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left((x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{\left((x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)} = \\ &= \frac{(x + \Delta x) - x}{\left((x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{\Delta x}{\left((x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)} \end{aligned}$$

Следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left((x + \Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{1}{0 + 0 + x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Заметим, что областью определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ является $D(y) = R$, но в точке $x = 0$ она не является дифференцируемой, т.к. $f'(0) = +\infty$.

5) Найти производную функции:

$$y = \frac{3x^2 - 3}{(x-1)}$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x^2 - 3}{(x-1)} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{(x-1)} \right)' = 3 \cdot \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x-1) - (x^2 - 1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= 3 \cdot \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2 - 1)}{(x-1)^2} = 3 \cdot \frac{2x - (x+1)}{(x-1)} = 3 \cdot \frac{2x - x - 1}{(x-1)} = 3 \cdot \left(\frac{x-1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

Или так:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x^2 - 3}{(x-1)} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x-1} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \right)' = \left[\frac{x-1}{x-1} = 1 = \text{const при } x \neq 1 \right]' = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{x-1}{x-1} \right) \cdot (x+1)' = 3 \cdot \left(\frac{x-1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

А такое решение требует уточнения области определения производной функции:

$$y' = \left(\frac{3x^2 - 3}{(x-1)} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x-1} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \right)' = 3$$

Функция $y(x)$ не определена в точке $x = 1$, и, следовательно, бессмысленно говорить и о её производной в этой точке.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 167.

6) Найти производную функции $f(x) = \frac{x^3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \cos x}{\sqrt{x}} + \text{tg} \frac{\pi}{6}$; найти $f'(0)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \cos x}{\sqrt{x}} + \text{tg} \frac{\pi}{6} \right)' = \left(x^3 - \cos x + \text{tg} \frac{\pi}{6} \right)' = 3x^2 + \sin x + 0 = 3x^2 + \sin x$$

Область определения функции $f(x)$: $x > 0$, поэтому для данной функции не существует её производной в точке $x = 0$. Строго говоря, результат следует записать в виде

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + \sin x \\ x > 0 \end{cases}$$

Или

$$f'(x) = \frac{3x^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \sin x.$$

$f'(0)$ не существует.