Гиперболические функции.

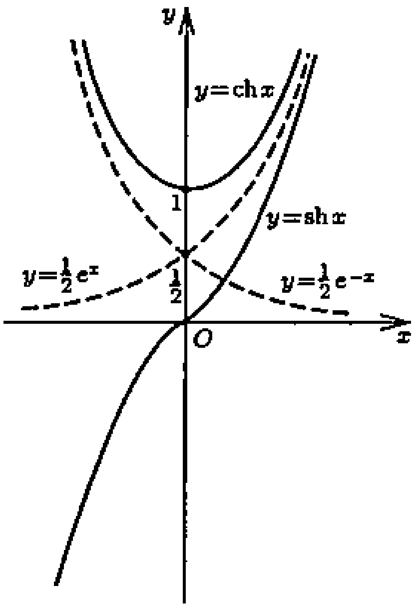
Гиперболическими функциями называются функции, определённые формулами

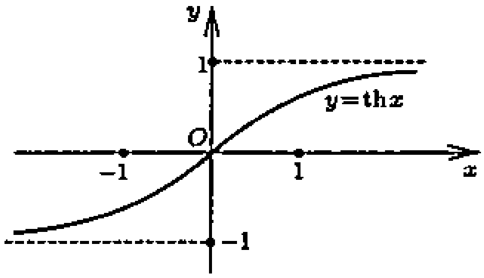
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$ - гиперболический синус;

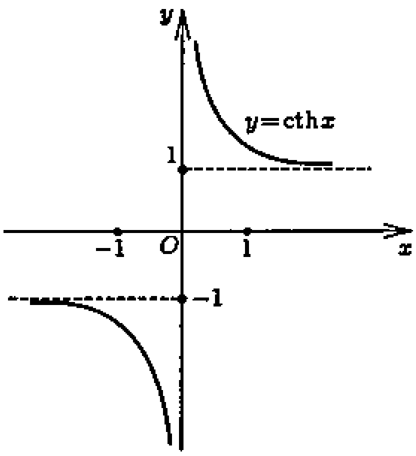
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$ - гиперболический косинус;

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$ - гиперболический тангенс;

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$ - гиперболический котангенс.







Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены и непрерывны на множестве R, а функция $\operatorname{cth} x$ определена и непрерывна на множестве R с выколотой точкой $x = 0$. Гиперболический косинус является чётной функцией, а гиперболический синус, тангенс и котангенс являются нечётными функциями:

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$$

График гиперболического косинуса называется цепной линией. Цепная линия является линией провисания тяжёлой нити, подвешенной в двух точках.

Название "гиперболические функции" объясняется тем, что уравнения $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$ можно рассматривать как параметрические уравнения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ (для гиперболических синуса и косинуса справедливо тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$). Параметр t в уравнениях гиперболы равен удвоенной площади гиперболического сектора; это отражено в обозначениях и названиях обратных гиперболических функций, где частица ar есть сокращение латинского слова area - площадь. Например, $\operatorname{arsh} x$ читается как "ареа-синус от x".

Из определения гиперболических функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ следуют формулы:

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^{x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

Можно показать (см. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. "Курс математического анализа", 2003, §20), что функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $x > 0$, строго возрастающие, а функция $y = \operatorname{ch} x$, $x \le 0$, строго убывающая. Поэтому указанные функции обратимы. Обозначим обратные к ним функции соответственно через $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{arch}_{+} x$, $\operatorname{arch}_{-} x$.

Обратные гиперболические функции.

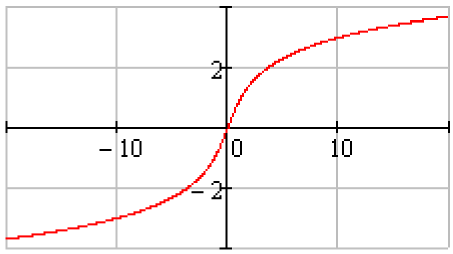
► Рассмотрим функцию, обратную к функции $\operatorname{sh} x$, т.е. функцию $\operatorname{arsh} x$. Выразим её через элементарные. Решая уравнение $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y$ относительно x, получаем $e^{x} = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Так как $e^{x} > 0$, то $e^{x} = y + \sqrt{1 + y^2}$, откуда $x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$. Заменяя x на y, а y на x, находим формулу для функции, обратной для гиперболического синуса:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right), \quad x \in R$$

Также имеет место тождество

$$\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{a}\right) + \ln a, \quad x \in R, \ a > 0$$

y(x) := asinh(x)



$$\lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arsh} x = \pm\infty$$

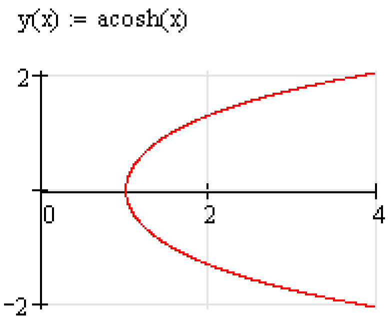
► Выразим через элементарные функции функцию, обратную к функции $\operatorname{ch} x$, т.е. функцию $\operatorname{arch} x$. Решая уравнение $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = y$ относительно x, получаем $e^{x} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Заметим, что при $y \ge 1$ имеем $y \pm \sqrt{y^2 - 1} > 0$. При этом знаку + соответствует верхняя ветвь функции на графике, а знаку - соответствует нижняя ветвь функции. Так что $x = \ln\left(y \pm \sqrt{1y^2 - 1}\right)$. Заменяя x на y, а y на x, находим формулу для функции, обратной для гиперболического косинуса:

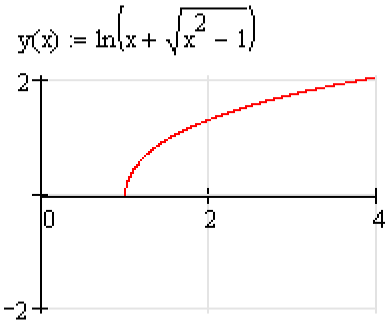
$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \ge 1$$

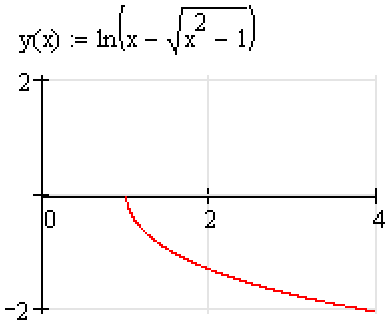
или

$$\operatorname{arch}_{+} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \ge 1$$

$$\operatorname{arch}_{-} x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \ge 1$$



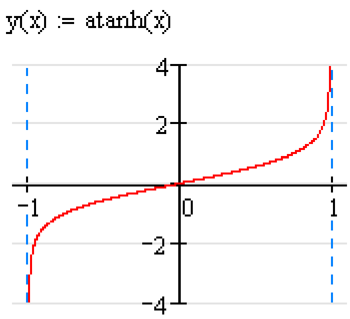




$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty$$

► Выразим через элементарные функции функцию, обратную к функции $\operatorname{th} x$, т.е. функцию $\operatorname{arth} x$. Решая уравнение $\operatorname{th} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y$ относительно x, получаем $e^x=\pm\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. Так как $e^x>0$, то $e^x=\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$, откуда $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$. Заменяя x на y, а y на x, находим формулу для функции, обратной для гиперболического тангенса:

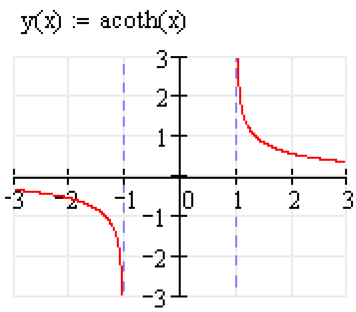
$$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad |x|<1$$



$$\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arth} x=+\infty$$
$$\lim_{x\to -1+0}\operatorname{arth} x=-\infty$$

► Выразим через элементарные функции функцию, обратную к функции $\operatorname{cth} x$, т.е. функцию $\operatorname{arcth} x$. Решая уравнение $\operatorname{cth} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=y$ относительно x, получаем $e^x=\pm\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$. Так как $e^x>0$, то $e^x=\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$, откуда $x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$. Заменяя x на y, а y на x, находим формулу для функции, обратной для гиперболического котангенса:

$$\operatorname{arcth} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),\quad |x|>1$$



$$\lim_{x\to 1+0}\operatorname{arcth} x=+\infty$$
$$\lim_{x\to -1-0}\operatorname{arcth} x=-\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arcth} x=0$$

Производные и интегралы от гиперболических функций.

Производные гиперболических функций находятся по формулам:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x|<1$$

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{x^2-1}, \quad |x|>1$$

При интегрировании гиперболических функций используем формулы:

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \qquad \int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x \qquad \int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x|$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\operatorname{arctg} e^x$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$$

Обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции связаны между собой следующими соотношениями (главные значения функций в комплексной плоскости):

$$\operatorname{arsh} x = -i\cdot\arcsin(xi)$$

$$\operatorname{arch} x = i\cdot\arccos x$$

$$\operatorname{arth} x = -i\cdot\operatorname{arctg}(xi)$$

$$\operatorname{arcth} x = i\cdot\operatorname{arcctg}(xi)$$

Обратные гиперболические функции, рассматриваемые в комплексной области, многозначны. Их однозначные ветви (главные значения) получаются, если в формулах

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

брать для логарифма его главные значения, и их обозначения пишутся с маленькой буквы.

Обозначения.

Мнемоника (обычная и в программе Mathcad) и как читать:

sh	sinh	гиперболический синус
ch	cosh	гиперболический косинус
th	tanh	гиперболический тангенс
cth	coth	гиперболический котангенс
arsh	asinh	ареа-синус
arch	acosh	ареа-косинус
arth	atanh	ареа-тангенс
arcth	acoth	ареа-котангенс

Варианты чтения например arsh :

ареа-синус,
гиперболический арксинус,
обратный гиперболический синус.

Литература:

1) Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. "Курс математического анализа", 2003, стр. 108...110, 177;
2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", 2003, часть 1, стр. 266;
3) Двайт Г.Б. "Таблицы интегралов и другие математические формулы", 1983, стр. 98...113;
4) http://ru.wikipedia.org/wiki/Гиперболические_функции.