Вычисление предела $a=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ можно сделать:

а) переходом к полярным координатам (ρ,φ), выбирая точку (x_0,y_0) в качестве полюса полярной системы координат и направляя полярную ось параллельно оси Ox;

б) приближением к точке (x_0,y_0) по линии $y(x)$, например $y(x)=x$ (что означает переход к пределу одной переменной x);

в) приближением к точке (x_0,y_0) по линии $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, например $\begin{cases} x(t)=m\cdot t \\ y(t)=n\cdot t \\ m,n\in R \end{cases}$ (что означает переход к пределу одной переменной t);

г) заменой переменной, например $xy=t$ (что означает переход к пределу одной переменной t).

1) Найти

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases} :\ \rho\to 0 \end{array}\right]=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1}=$$

$$=\left[\rho\to 0:\ \left(\sqrt{\rho^2+1}-1\right)=\frac{\rho^2}{2}\right]=\lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho^2}{\rho^2}=2$$

Литература:

1) Петрушко И.М. и др. “Курс высшей математики”, 2006, стр. 135 (пример 13.5).

2) Найти

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases} :\ \rho\to 0 \end{array}\right]=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

Зависимость предела от θ означает, что $\boldsymbol{l}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ не существует (при $\theta\in R$: $-\frac{1}{2}\le\boldsymbol{l}\le\frac{1}{2}$).

Литература:

1) Петрушко И.М. и др. “Курс высшей математики”, 2006, стр. 135 (пример 13.6).

3) Найти

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Будем приближаться к точке $(0;0)$ по прямой $y=kx$, где $k\in R$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

Зависимость предела от k означает, что $\boldsymbol{l} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует (при $k\in R$: $-1<\boldsymbol{l}\le 1$).

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 306 (пример 43.1);
2) Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. "Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчёты", 2008, стр. 278.

4) Найти

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{xy}-\cos xy}{3xy}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{xy}-\cos xy}{3xy} = \left[\begin{array}{l} xy=t \\ \begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0 \end{cases} :\ t\to 0 \end{array}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-\cos t}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(e^t-1\right)+(1-\cos t)}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{t+\frac{1}{2}t^2}{3t} = \frac{1}{3}$$

Литература:

1) Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. "Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчёты", 2008, стр. 280 (пример 10.8).

5) Найти

а) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 8}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{x}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\,y-2\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{\left(x^2-1\right)\left(xy+1\right)}{x^3y}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x^2y^3-\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-1}$.

а)

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 8}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^{x}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{y}{x}=t\\ \begin{cases}x\to\infty\\ y\to 8\end{cases}\Rightarrow\ t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{8}{t}}=\left(\lim_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{8}=e^{8}$$

- осуществлён переход к одной переменной t и использован второй замечательный предел.

б)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\,y-2\sqrt{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sqrt{x}\,y-2\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}}=\frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(\dfrac{\sqrt{x}\,y}{\sqrt{\sin x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 2}y-2\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 2+0}y-2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{1}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 2+0}y-2\right)}=\left[\dfrac{1}{+0}\right]=+\infty\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 2-0}y-2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{1}\cdot\left(\lim\limits_{y\to 2-0}y-2\right)}=\left[\dfrac{1}{-0}\right]=-\infty\end{array}\right.$$

- использован первый замечательный предел; результат зависит от направления приближения $y\to 2$ - слева или справа.

в)

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{\left(x^2-1\right)\left(xy+1\right)}{x^3y}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=\left(1-0\right)\cdot\left(1+0\right)=1$$

- неопределённость устранена делением числителя и знаменателя алгебраической дроби на x^3y.

г)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x^2y^3-\sqrt{x}}{y\sqrt{x}-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\left(y\sqrt{x}\right)^3-1\right)}{y\sqrt{x}-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{x}\cdot\cancel{\left(y\sqrt{x}-1\right)}\left(\left(y\sqrt{x}\right)^2+y\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{y\sqrt{x}-1}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\sqrt{x}\cdot\left(\left(y\sqrt{x}\right)^2+y\sqrt{x}+1\right)=1\cdot\left(1+1+1\right)=3$$

- неопределённость вида $\left[0/0\right]$ устранена разложением числителя алгебраической дроби на множители, с последующим сокращением множителя, создающего неопределённость.