

1) Исходя из определения предела, доказать, что функция $f(x) = x^3$ бесконечно малая при $x \rightarrow 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x: |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x: |x - 0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|x^3| < \varepsilon$$

$$|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$$

Т.е., взяв $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$, получим, что $\forall x: |x - 0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|x^3| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x) = x^3$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$.

$$\text{Итак, } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^3 = 0^3 = 0.$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 136.

2) Доказать, исходя из определения предела, что функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ бесконечно большая при $x \rightarrow 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если $\forall M > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x: |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Возьмём произвольное $M > 0$ и найдём $\delta = \delta(M) > 0$ такое, что $\forall x: |x - 0| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| > M$$

$$|x^2| < \frac{1}{M}$$

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Т.е., взяв $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, получим, что $\forall x: |x - 0| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| > M$$

Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно большой при $x \rightarrow 0$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 135.

3) Доказать, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Для каких значений x выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$?

Провести расчёт для $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ такое, что $\forall x: x > M$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

► Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём $M = M(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x: x > M$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon.$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$, и для оценки граничного числа M возьмём значение $\max |\sin x| = 1$, определяющее наибольшее значение M :

$$\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{модуль убран, т.к. } x > 0)$$

Т.е., взяв $M = \frac{1}{\varepsilon}$, видим, что $\forall x: x > M$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

► Неравенство $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, выполняется для значений x , удовлетворяющих неравенству $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Проведём расчёт для указанных значений ε ($M = \frac{1}{\varepsilon}$):

ε	0,1	0,01	0,001
M	10	100	1000

Неравенство $\left| \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$ выполняется:

при $\varepsilon = 0,1$ для $x > 10$;

при $\varepsilon = 0,01$ для $x > 100$;

при $\varepsilon = 0,001$ для $x > 1000$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 135, стр. 139 (пример 17.1).

4) Доказать, что предел суммы двух функций при $x \rightarrow x_0 + 0$ равен сумме их пределов.

Теорема (о связи функции, её предела и б.м.ф.). Если функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow x_0$ предел, равный A , то её можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ то } f(x) = A + \alpha(x).$$

Теорема (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. если

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \varphi(x) = B$. Тогда для некоторой окрестности справа от точки x_0 (по теореме о связи функции, её предела и б.м.ф.) можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$. Следовательно, $f(x) + \varphi(x) = A + B + (\alpha(x) + \beta(x))$. Здесь $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая функция как сумма бесконечно малых функций. Поэтому (в соответствии с обратной теоремой) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} \varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 141.

5) Доказать, что предел произведения двух функций при $x \rightarrow x_0 - 0$ равен произведению их пределов.

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \varphi(x) = B$. Тогда для некоторой окрестности слева от точки x_0 (по теореме о связи функции, её предела и б.м.ф.) можно записать $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции. Следовательно, $f(x) \cdot \varphi(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = AB + (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x))$. Выражение в скобках есть бесконечно малая функция. Поэтому (в соответствии с обратной теоремой) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \cdot \varphi(x) = A \cdot B$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0-0} \varphi(x).$$

Теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 141.

6) Доказать, что если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \rightarrow -\infty$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow -\infty$, если $\forall M > 0 \exists N = N(M) < 0$, что $\forall x : x < N$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

По определению бесконечно малой функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \exists M = M(\varepsilon) < 0$, что $\forall x : x < M$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Или $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Данное определение равносильно утверждению: для любого $\frac{1}{\varepsilon} > 0 \exists N = M\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < 0$, что $\forall x : x < N$

выполняется неравенство $\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Это утверждение соответствует определению бесконечно большой функции, где $M = \frac{1}{\varepsilon}$; следовательно,

функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 139.