

1) Вычислить предел **последовательности** и обосновать результат, исходя из определения предела (по $\varepsilon > 0$ найти соответствующее $M(\varepsilon)$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2}$$

Вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{4 + 0}{3 + 0} = \frac{4}{3}$$

Обоснуем полученный результат. По определению предела по **Гейне**

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M(\varepsilon): \quad \forall n > M(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Т.е. в соответствии с определением число $4/3$ будет пределом последовательности $x_n = \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2}$, $n \in N$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся натуральное число M такое, что для всех $n > M$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Это неравенство справедливо для всех n , удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{-5}{3 \cdot (3n^2 + 2)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{5}{3 \cdot (3n^2 + 2)} < \varepsilon$$

$$3n^2 + 2 > \frac{5}{3 \cdot \varepsilon}$$

$$n > \sqrt{\frac{5}{9 \cdot \varepsilon} - \frac{2}{3}}$$

т.е. для всех $n > M(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt{\frac{5}{9 \cdot \varepsilon} - \frac{2}{3}} \right\rceil$, где $\left\lceil \sqrt{\frac{5}{9 \cdot \varepsilon} - \frac{2}{3}} \right\rceil$ - целая часть числа $\sqrt{\frac{5}{9 \cdot \varepsilon} - \frac{2}{3}}$, справедливо

неравенство (1). Следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{4}{3}$.

2) Вычислить предел **функции** и обосновать результат, исходя из определения предела (по $\varepsilon > 0$ найти соответствующее $\delta(\varepsilon)$):

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{x - \frac{1}{2}}$$

Вычислим предел:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{x - \frac{1}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(x + \frac{1}{3} \right)}{\left(x - \frac{1}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 6 \cdot \left(x + \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 5$$

Обоснуем полученный результат. По определению предела по **Коши**

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta, \text{ выполняется неравенство}$$

$$\left| \left(\frac{6x^2 - x - 1}{x - \frac{1}{2}} \right) - 5 \right| < \varepsilon \quad (1)$$

$$\left| \frac{6 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(x + \frac{1}{3} \right)}{\left(x - \frac{1}{2} \right)} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$|6x + 2 - 5| < \varepsilon$$

$$|6x - 3| < \varepsilon$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Итак, взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, видим, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \left(= \frac{\varepsilon}{6} \right)$, выполняется

неравенство (1). Следовательно $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{x - \frac{1}{2}} = 5$.

3) Доказать по определению предела числовой **последовательности**, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-7} = \frac{4}{3}$.

По определению, число $4/3$ является пределом числовой последовательности $x_n = \frac{4n+2}{3n-7}$, $n \in N$, если

$\forall \varepsilon > 0$ найдётся натуральное число $N(\varepsilon)$, такое, что $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{4n+2}{3n-7} - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon.$$

Решим последнее неравенство относительно n :

$$\left| \frac{12n+6-12n+28}{3 \cdot (3n-7)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{34}{3 \cdot |3n-7|} < \varepsilon$$

$$|3n-7| > \frac{34}{3\varepsilon}$$

$$3n-7 > \frac{34}{3\varepsilon} \quad (\text{начиная с } n > 2)$$

$$3n > \frac{34}{3\varepsilon} + 7$$

$$n > \frac{7}{3} + \frac{34}{9\varepsilon}$$

Следовательно, $N(\varepsilon) = \left[\frac{7}{3} + \frac{34}{9\varepsilon} \right]$, где $\left[\frac{7}{3} + \frac{34}{9\varepsilon} \right]$ - целая часть числа $\left(\frac{7}{3} + \frac{34}{9\varepsilon} \right)$.

Например, если $\varepsilon = 0,1$, то $N(\varepsilon) = 41$; если $\varepsilon = 0,01$, то $N(\varepsilon) = 381$, и т.д.

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ указано соответствующее значение $N(\varepsilon)$. Этим доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-7} = \frac{4}{3}$.

Литература:

1) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", 2001, стр. 18 (примеры 3, 4).