Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, при условии $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$;
4. $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $c\equiv const$;
5. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$;
6. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$; [3, 4]
7. $\lim\limits_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ при условии $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$. [4]

1) Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7x+2}{3x^2+11x-4}\right)^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3-0}\ln(3-x)$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+2^x\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x-2}$.

а)

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\cancel{(3x-1)}\cdot(x-2)}{\cancel{(3x-1)}\cdot(x+4)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{(x-2)}{(x+4)}=\frac{\frac{1}{3}-2}{\frac{1}{3}+4}=-\frac{5}{13}$$

- неопределённость вида $0/0$ устранена разложением числителя и знаменателя алгебраической дроби на множители с последующим сокращением множителей, обуславливающих неопределённость.

б)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+11x-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{11}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{3-0+0}{3+0-0}=1$$

- неопределённость вида ∞/∞ устранена делением числителя и знаменателя алгебраической дроби на наивысшую степень переменной x, т.е. на x^2.

в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{3x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{3x}=-\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2}=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}=-\frac{25}{6}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)}\right)^2=$$

$$=-\frac{25}{6}\cdot 0\cdot 1^2=0$$

- в решении использована тригонометрическая формула $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, применён первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$, а также имели ввиду, что при $x\to 0$: $\frac{5x}{2}\to 0$.

г)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{tg}x}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}-x=t\\ x\to\frac{\pi}{4}:\ t\to 0\end{array}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}t\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\dfrac{\operatorname{tg}t-1}{1+\operatorname{tg}t}}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t}}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\cos t\left(1+\operatorname{tg}t\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\cos t+\sin t}=\frac{2}{\cos 0+\sin 0}=\frac{2}{1+0}=2$$

- неопределённость вида $0/0$ устранена с помощью замены переменной и тригонометрических преобразований (использовали формулу $\operatorname{tg}\left(\alpha\pm\beta\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$).

д)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7x+2}{3x^2+11x-4}\right)^{2x}=\left[1^\infty\right]=\left[\begin{array}{l}\dfrac{7x+2}{3x^2+11x-4}=\dfrac{1}{t}\\ t=\dfrac{3x^2+11x-4}{7x+2}=\dfrac{3}{7}x+\dfrac{71}{49}-\dfrac{338}{49\cdot\left(7x+2\right)}\\ \dfrac{3}{7}x+\dfrac{71}{49}-\dfrac{338}{49\cdot\left(7x+2\right)}=t\\ 2x=\dfrac{14}{3}t-\dfrac{142}{21}+\dfrac{676}{21\cdot\left(7x+2\right)}\\ x\to\infty:\ t\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{14}{3}t-\frac{142}{21}+\frac{676}{21\cdot(7x+2)}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{14}{3}t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{142}{21}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{676}{21\cdot(7x+2)}}=$$

$$=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{14}{3}}\cdot(1+0)^{-\frac{142}{21}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{676}{21\cdot(7x+2)}}=e^{\frac{14}{3}}\cdot 1\cdot(1+0)^{0}=e^{\frac{14}{3}}$$

- использован второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

е)

$$\lim_{x\to 3-0}\ln(3-x)=\begin{bmatrix}3-x=t\\ x\to 3-0:\ t\to 0+0\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0+0}\ln t=-\infty$$

- вычисление одностороннего (левостороннего) предела свели к вычислению одностороннего предела элементарной функции $f(x)=\ln x$.

ж)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+2^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}3+\lim_{x\to+\infty}2^{x}=\begin{bmatrix}\textit{показатель степени положителен и}\\ \textit{неограниченно увеличивается; величина,}\\ \textit{стоящая под знаком предела, неограниченно}\\ \textit{растёт, оставаясь положительной}\end{bmatrix}=[3+\infty]=+\infty$$

- использовано свойство пределов: предел суммы равен сумме пределов, и свойство монотонного возрастания показательной функции $f(x)=2^{x}$.

з)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-2}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\begin{bmatrix}x=-t\\ x\to-\infty:\ t\to+\infty\end{bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+2}}{-t-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}{-1-\frac{2}{t}}=\frac{\sqrt{1+0}}{-1-0}=-1$$

- неопределённость вида $[\infty/\infty]$ устранена делением числителя и знаменателя алгебраической дроби на наибольшую степень переменной x, т.е. на t.

Литература:

1) Письменный Д.Т. “Конспект лекций по высшей математике”, 2006, стр. 140;
2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 1, 2003, стр. 142;
3) Аксёнов А.П. “Математика. Математический анализ” (часть 1), 2005, стр. 127;
4) Каплан И.А., Пустынников В.И. “Практикум по высшей математике”, том 1, 2006, стр. 316, 327.

2) Вычислить пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\cdot\ln\left(x+e^{x}\right)\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\cos 2x)\right)$.

а)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{по Лопиталю}]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty$$

б)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}(\ln x)=\infty$$

- произведение бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая (свойство б.б.ф.; 1, стр. 54).

в)

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)=1$$

Здесь использовали теорему Коши:
если функция $f:(a;+\infty)\to R$ ограничена в каждом конечном интервале $(a;b)$, то

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ при $f(x)\geq c>0$ [2, стр. 89, пример 230].

г)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\begin{bmatrix}\text{при } x\to 0\\ \dfrac{1}{\sin x}\sim\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}0=0$$

д)

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\cdot\ln\left(x+e^{x}\right)\right)=[0\cdot\infty]=\begin{bmatrix}\text{при } x\to 0\\ \ln(1+x)\sim x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\cdot\left(x+e^{x}-1\right)\right)=\begin{bmatrix}\text{при } x\to 0\\ e^{x}-1\sim x\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\operatorname{ctg} x\right)=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=2\cdot 1\cdot 1=2$$

- здесь использованы эквивалентные бесконечно малые функции.

е)

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\cos 2x)\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\ln(\cos 2x)\right)=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\ln(\cos 2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(\cos x)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 2x)}{x}\right) =$$

$$= 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos 2x)}{x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{при } x\to 0: \\ \cos x \sim 1-\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right] =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1-\sqrt{2}x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{2}x)^{\frac{1}{x}}\right) = \left[\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a\right] =$$

$$= \ln\left(e^{-\sqrt{2}}\cdot e^{\sqrt{2}}\right) = \ln 1 = 0$$

Литература:

1) Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. "Задачи и упражнения по математическому анализу", часть 1, 1988;
2) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. "Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл", том 1, 2001;
3) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 152 (эквивалентные бесконечно малые функции).

3) Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\ln^2(1+x)}{\sin^5\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\ln^2(1+x)}{\sin^5\frac{x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{\sin^3\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{\ln(1+x)}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{\sin^3\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 =$$

$$= 4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)}{\sin^3\frac{x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = 4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{\left(\sin^3\frac{x}{2}\right)'} = 4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot 1} = \frac{16}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\cancel{\frac{1-\cos x}{1-\cos x}} = \frac{16}{3}\cdot 1 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

При решении использованы свойства бесконечно малых функций ($x\to 0$):

$$\ln(1+x)\sim x$$

$$\sin x\sim x$$

и правило Лопиталя.