1) Разложить функцию $f\left(x,\ y\right)=\ln\left(1-x+2xy\right)$ по формуле Тейлора в окрестности начала отсчёта $\left(x_0\ ;\ y_0\right)=\left(0\ ;\ 0\right)$ для членов 2-го порядка включительно.

Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\left(0;0\right)$ называется рядом Маклорена:

$$f\left(x,y\right)=f\left(0;0\right)+\frac{1}{1!}\cdot\left[x\,f'_x\left(0;0\right)+y\,f'_y\left(0;0\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[x^2\,f''_{xx}\left(0;0\right)+2x\,y\,f''_{xy}\left(0;0\right)+y^2\,f''_{yy}\left(0;0\right)\right]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f\left(0;0\right)+\ldots$$

Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$f'_x\left(x,\ y\right)=\frac{2y-1}{1-x+2xy}$$

$$f'_y\left(x,\ y\right)=\frac{2x}{1-x+2xy}$$

$$f''_{xx}\left(x,\ y\right)=-\left(\frac{2y-1}{1-x+2xy}\right)^2$$

$$f''_{xy}\left(x,\ y\right)=\frac{2}{\left(1-x+2xy\right)^2}$$

$$f''_{yy}\left(x,\ y\right)=-\left(\frac{2x}{1-x+2xy}\right)^2$$

Вычислим значения функции и производных при $x_0=y_0=0$:

$$f\left(0,\ 0\right)=0$$

$$f'_x\left(0,\ 0\right)=-1$$

$$f'_y\left(0,\ 0\right)=0$$

$$f''_{xx}\left(0,\ 0\right)=-1$$

$$f''_{xy}\left(0,\ 0\right)=2$$

$$f''_{yy}\left(0,\ 0\right)=0$$

Следовательно,

$$f\left(x,\ y\right)=0+1\cdot\left[x\cdot\left(-1\right)+y\cdot 0\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot\left(-1\right)+2\cdot x\cdot y\cdot 2+y^2\cdot 0\right]=-x-\frac{1}{2}\cdot x^2+2xy=x\cdot\left(2y-1-\frac{x}{2}\right)$$

Литература

1) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, 2003, стр. 87 (ряд Тейлора для функции двух независимых переменных), стр. 90 (примеры 388, 389).

2) Написать формулу Тейлора для функции

$$f(x,y)=\sqrt{2x^3-y}$$

в окрестности точки $M_0(2;\,0)$ при $n=2$.

Разложение функции двух независимых переменных в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_0;y_0)$:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\cdot\left[(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\cdot\left[(x-x_0)^2 f''_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(x_0,y_0)+(y-y_0)^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\right]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)+\ldots$$

Найдём частные производные первого и второго порядков:

$$f'_x(x,\,y)=\left(\sqrt{2x^3-y}\right)'_x=\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-y}}$$

$$f'_y(x,\,y)=\left(\sqrt{2x^3-y}\right)'_y=-\frac{1}{2\sqrt{2x^3-y}}$$

$$f''_{xx}(x,\,y)=\left(\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-y}}\right)'_x=\frac{6x\cdot\sqrt{2x^3-y}-3x^2\cdot\dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-y}}}{(2x^3-y)}=\frac{3x^4-6xy}{(2x^3-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''_{xy}(x,\,y)=\left(\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-y}}\right)'_y=\frac{3x^2}{2\cdot(2x^3-y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''_{yy}(x,\,y)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2x^3-y}}\right)'_y=-\frac{1}{4\cdot(2x^3-y)^{\frac{3}{2}}}$$

Вычислим значения функции и производных в точке $M_0(2;\,0)$:

$$f(2,0)=4$$

$$f'_x(2,0)=3$$

$$f'_y(2,0)=-1/8$$

$$f''_{xx}(2,0)=3/4$$

$$f''_{xy}(2,0)=3/32$$

$$f''_{yy}(2,0)=-1/256$$

Следовательно,

$$f(x,\,y)=4+1\cdot\left[(x-2)\cdot 3-y\cdot\frac{1}{8}\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[(x-2)^2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot(x-2)\cdot y\cdot\frac{3}{32}-y^2\cdot\frac{1}{256}\right]=$$

$$=\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{512}y^2+\frac{3}{32}xy+\frac{3}{2}x-\frac{5}{16}y-\frac{1}{2}$$

Вычисления в Mathcad 14:

$$f(x,y) := \sqrt{2x^3 - y}$$

$$fx(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y) \rightarrow \frac{3\cdot x^2}{\sqrt{2\cdot x^3 - y}} \qquad fxx(x,y) := \frac{d}{dx}fx(x,y) \text{ simplify } \rightarrow \frac{3\cdot x^4 - 6\cdot x\cdot y}{\left(2\cdot x^3 - y\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$fy(x,y) := \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow -\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot x^3 - y}} \qquad fyy(x,y) := \frac{d}{dy}fy(x,y) \rightarrow -\frac{1}{4\cdot\left(2\cdot x^3 - y\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$fxy(x,y) := \frac{d}{dy}fx(x,y) \rightarrow \frac{3\cdot x^2}{2\cdot\left(2\cdot x^3 - y\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(2,0) = 4$$

$$fx(2,0) = 3 \qquad fxx(2,0) = \frac{3}{4} \qquad fyy(2,0) = -\frac{1}{256} \qquad fxy(2,0) = \frac{3}{32}$$

$$fy(2,0) = -\frac{1}{8}$$

Литература

1) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, 2003, стр. 87 (ряд Тейлора для функции двух независимых переменных).