1) Разложить в ряд по $(x-4)$ функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

Формула разложения в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1 \qquad f(4) = 35$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \qquad f'(4) = 33$$

$$f''(x) = 6x - 4 \qquad f''(4) = 20$$

$$f'''(x) = 6 \qquad f'''(4) = 6$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 35 + 33 \cdot (x-4) + \frac{20}{2!}(x-4)^2 + \frac{6}{3!}(x-4)^3 = \\ &= 35 + 33 \cdot (x-4) + 10 \cdot (x-4)^2 + (x-4)^3 \end{aligned}$$

2) Представить рядом Тейлора функцию $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}$ в окрестности точки $x=0$.

Ряд Тейлора (степенной ряд) в окрестности точки $x_0 = 0$ называется рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Воспользуемся табличными разложениями основных функций в степенной ряд. Так, для функции $(1+x)^p$ разложение в степенной ряд имеет вид:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad m \in R, \quad x \in (-1; 1)$$

Для функции $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3} = (8-x^3)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}$ имеем: $m = 1/3$, x соответствует $\left(-\frac{x}{2}\right)^3$,

следовательно

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8-x^3} &= 2 \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}-2\right) \dots \left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} \cdot \left(\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right)^n\right) = \\ &= 2 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}-2\right) \dots \left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^{3n} = \\ &= 2 \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1!} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^9 + \dots\right] = \\ &= 2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{288}x^6 - \frac{5}{20736}x^9 - \dots \end{aligned}$$

Разложение в ряд Маклорена в Mathcad 14:

$$f(x) := \sqrt[3]{8 - x^3}$$

$$f(x) \text{ series, } x, 16 \rightarrow 8^{\frac{1}{3}} + \frac{-1}{24} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^3 + \frac{-1}{576} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^6 + \frac{-5}{41472} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^9 + \frac{-5}{497664} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^{12} + \frac{-11}{11943936} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot x^{15} + O(x^{18})$$

$$f(x) \left| \begin{array}{l} \text{series, } x, 16 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 - \frac{1}{12} \cdot x^3 - \frac{1}{288} \cdot x^6 - \frac{5}{20736} \cdot x^9 - \frac{5}{248832} \cdot x^{12} - \frac{11}{5971968} \cdot x^{15}$$

Литература:

- 1) Ибрагимов Р.Б., Пяткова В.Б. "Математика, 4-й семестр", методичка УрГТУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 16 (примеры 1.1, 1.2, 1.3);
- 2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, 2003, стр. 87;
- 3) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 217.

3) Разложить в ряд функцию $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ по степеням x , и вычислить $f(x)$ при $x = 0,5$ с точностью до 0,0001.

Поскольку $x = 0,5$ близко к 0, используем разложение $f(x)$ в точке $x_0 = 0,5$, т.е. ряд Маклорена.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена функции e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x \in [-\infty; \infty], n \in N_0)$$

Заменяя x на $-x$, получаем

$$e^{-x} = 1 + \frac{(-x)}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \dots$$

И:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = x^2 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{n+2}}{n!} + \dots$$

При $x = 0,5$:

$$f(x) = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3 \cdot 1!} + \frac{1}{2^4 \cdot 2!} - \frac{1}{2^5 \cdot 3!} + \frac{1}{2^6 \cdot 4!} - \frac{1}{2^7 \cdot 5!} + \dots \approx$$

$$\approx 0,25000 - 0,12500 + 0,03125 - 0,00521 + 0,00065 - 0,00007 + \dots \approx 0,1516$$

- останавливаем суммирование на 6-м члене знакопеременующегося ряда, поскольку он меньше уровня заданной точности $\sigma = 10^{-4}$.