

1) Разложить функцию

$$f(x) = |1 - x|$$

в ряд Фурье в интервале $(-2; 2)$.

Рассмотрим функцию $f(x)$ как периодическую:

$$y(x) := \begin{cases} |1 - x| & \text{if } -2 < x < 2 \\ |1 - x - 4| & \text{if } -6 < x < -2 \\ |1 - x + 4| & \text{if } 2 < x < 6 \\ \text{NaN} & \text{otherwise} \end{cases}$$



► Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, то её рядом Фурье по основной тригонометрической системе называется ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе, составленный для какого-нибудь отрезка длины $2l$.

Для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[-l; l]$ и имеющей период $2l$, удовлетворяющей на этом отрезке условиям Дирихле, разложение в ряд Фурье по основной тригонометрической системе делаем по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right), \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Примечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π -периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$.

► **Теорема Дирихле** (о сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всём отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точке непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т.е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. На концах отрезка (в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Вычисляем коэффициенты ряда. Показано начало ручного счёта, окончательный результат получаем в Mathcad 14:

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(-2 - \frac{4}{2} \right) + \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 |1-x| dx \rightarrow \frac{5}{2} = 2.5$$

$$a_m = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^1 (1-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \int_1^2 (x-1) \cos \frac{m\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi m} \right)^2 \cdot \left(\cos(\pi m) - \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \pi m \cdot \sin(\pi m) \right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 |1-x| \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{2}\right) dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{4 \cdot \cos(\pi \cdot m) - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) + 4 \cdot \pi \cdot m \cdot \sin(\pi \cdot m)}{\pi^2 \cdot m^2}$$

$$b_m = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{m\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^1 (1-x) \sin \frac{m\pi x}{2} dx + \int_1^2 (x-1) \sin \frac{m\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi m} \right)^2 \cdot \left(\frac{\pi m}{2} \cdot \cos(\pi m) - \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right)$$

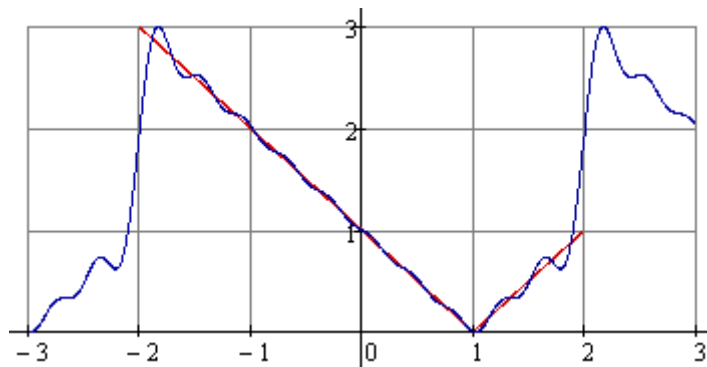
$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 |1-x| \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{2}\right) dx \text{ simplify } \rightarrow -\frac{4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right)^2 - 1\right)}{\pi^2 \cdot m^2}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) =$$

$$= \frac{5}{4} + \left(\frac{2}{\pi m} \right)^2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(\cos(\pi m) - \cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \pi m \cdot \sin(\pi m) \right) \cdot \cos \frac{\pi m x}{2} + \left(\frac{\pi m}{2} \cdot \cos(\pi m) - \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right) \cdot \sin \frac{\pi m x}{2} \right)$$

График функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ при $n = 10$ (Mathcad 14):



Литература:

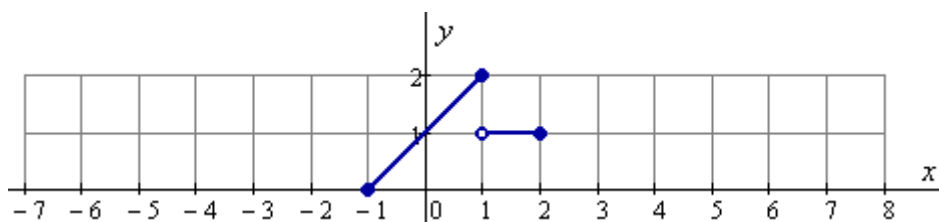
- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 487;
- 2) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 2, 2003, стр. 111 (задача 488);
- 3) Ибрагимова Р.Б., Пяткова В.Б. "Математика, 4-й семестр", методичка УрГТУ (г. Екатеринбург), 2005, стр. 22;
- 4) Воробьев Н.Н. "Теория рядов", 2002, стр. 162.

4.31) Разложить в ряд Фурье по основной тригонометрической системе $2l$ -периодическую функцию ($l = 3$)

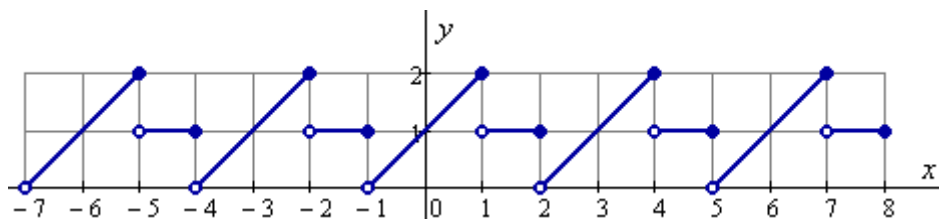
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Построить график функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

График функции $f(x)$ на промежутке одного периода $[-1; 2]$:



На всей числовой оси:



► Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2l$, то её ряд Фурье по основной тригонометрической системе называется ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе, составленный для какого-нибудь отрезка длины $2l$.

Для функции $f(x)$, определённой на отрезке $[-l; l]$ и имеющей период $2l$, удовлетворяющей на этом отрезке условиям Дирихле, разложение в ряд Фурье по основной тригонометрической системе делаем по формулам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \text{ где}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Примечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π -периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье функций, период которых $T = 2l$.

► **Теорема Дирихле** (о сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть 2π -периодическая функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет двум условиям:

1. $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;
2. $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всём отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции $f(x)$ тригонометрический ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

1. В точке непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;
2. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

т.е. равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3. На концах отрезка (в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$) сумма ряда равна

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-1}^1 (x+1) dx + \int_1^2 dx \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^1 + x \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) + 2 - 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-1}^1 (x+1) \cos \frac{\pi n x}{3} dx + \int_1^2 \cos \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{3(x+1)}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{3} \right) - \left(0 + \frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{3} \right) + \frac{3}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} - \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} + \cancel{\frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{3}} - \cancel{\frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n}{3}} + \frac{3}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} - \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \cdot \left(\sin \frac{\pi n}{3} + \sin \frac{2\pi n}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\int_{-1}^1 (x+1) \sin \frac{\pi n x}{3} dx + \int_1^2 \sin \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(-\frac{3(x+1)}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 + \left(-\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \right) \Big|_1^2 \right) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\left(-\frac{6}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} \right) - \left(0 - \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} \right) + \left(-\frac{3}{\pi n} \cos \frac{2\pi n}{3} \right) - \left(-\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{3} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} - \frac{3}{\pi n} \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{3} \right) = \\
&= \frac{6}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} - \frac{1}{\pi n} \cos \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{3} = \\
&= \frac{1}{\pi n} \cdot \left(\frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} - \cos \frac{\pi n}{3} - \cos \frac{2\pi n}{3} \right)
\end{aligned}$$

Вычисление отдельных интегралов:

$$\int \cos \frac{\pi n x}{3} dx = \frac{3}{\pi n} \cdot \int \cos \frac{\pi n x}{3} d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} + C$$

$$\begin{aligned}
\int (x+1) \cos \frac{\pi n x}{3} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{3} dx \\ v = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \end{array} \right] = (x+1) \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} - \frac{3}{\pi n} \int \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \\
&= \frac{3(x+1)}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} - \frac{3}{\pi n} \cdot \left(-\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \right) + C = \frac{3(x+1)}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{3} + C
\end{aligned}$$

$$\int \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \frac{3}{\pi n} \cdot \int \sin \frac{\pi n x}{3} d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) = \frac{3}{\pi n} \cdot \left(-\cos \frac{\pi n x}{3} \right) + C = -\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} + C$$

$$\begin{aligned}
\int (x+1) \sin \frac{\pi n x}{3} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \\ dv = \sin \frac{\pi n x}{3} dx \\ v = -\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \end{array} \right] = -(x+1) \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{3}{\pi n} \int \cos \frac{\pi n x}{3} dx = \\
&= -\frac{3(x+1)}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{3}{\pi n} \cdot \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} + C = -\frac{3(x+1)}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{3} + C
\end{aligned}$$

Итак,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\sin \frac{\pi n}{3} + \sin \frac{2\pi n}{3} \right) \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + \left(\frac{6}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} - \cos \frac{\pi n}{3} - \cos \frac{2\pi n}{3} \right) \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

График функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ при $n = 10$ (Mathcad 14):

$$f(x) := \begin{cases} (x+1) & \text{if } -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{if } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$S(x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{10} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n \cdot x}{3}\right) + \left(\frac{6}{\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n \cdot x}{3}\right) \right]$$

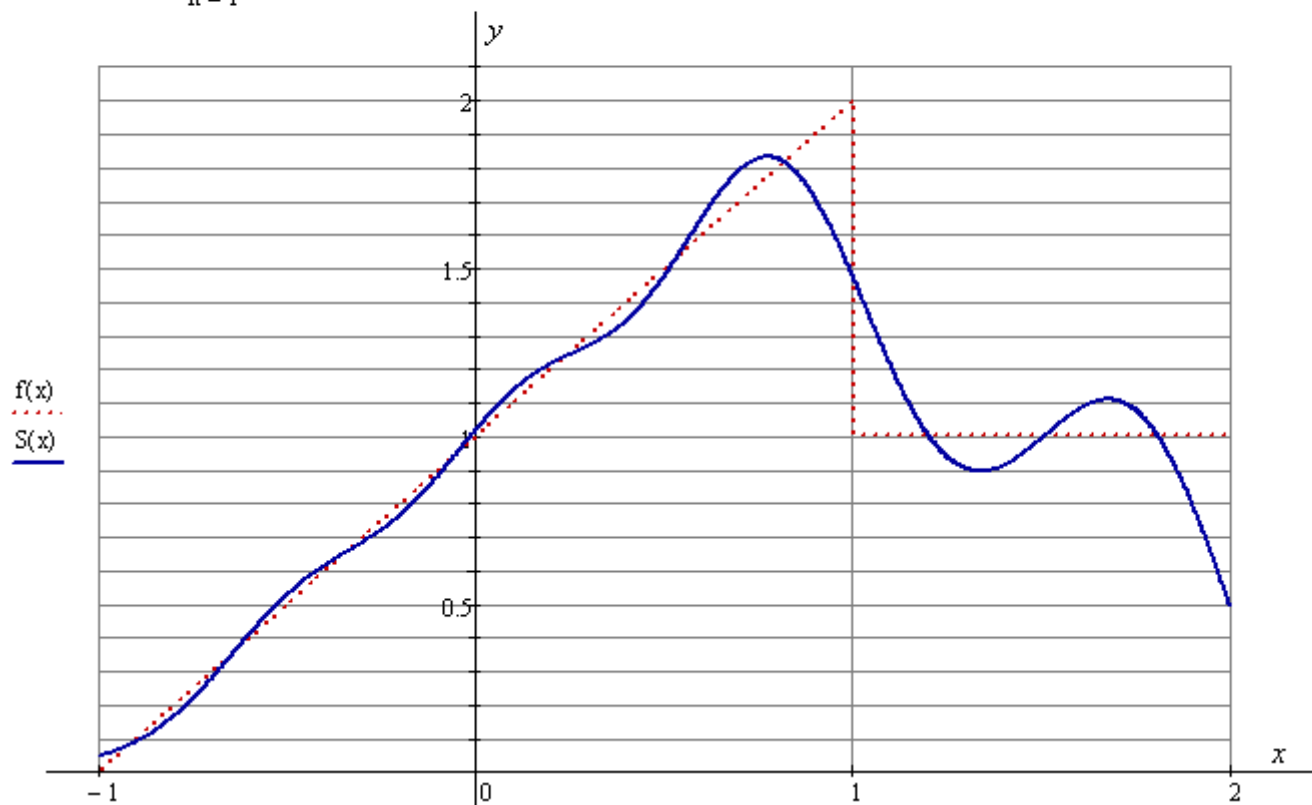


График функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ при $n = 100$:

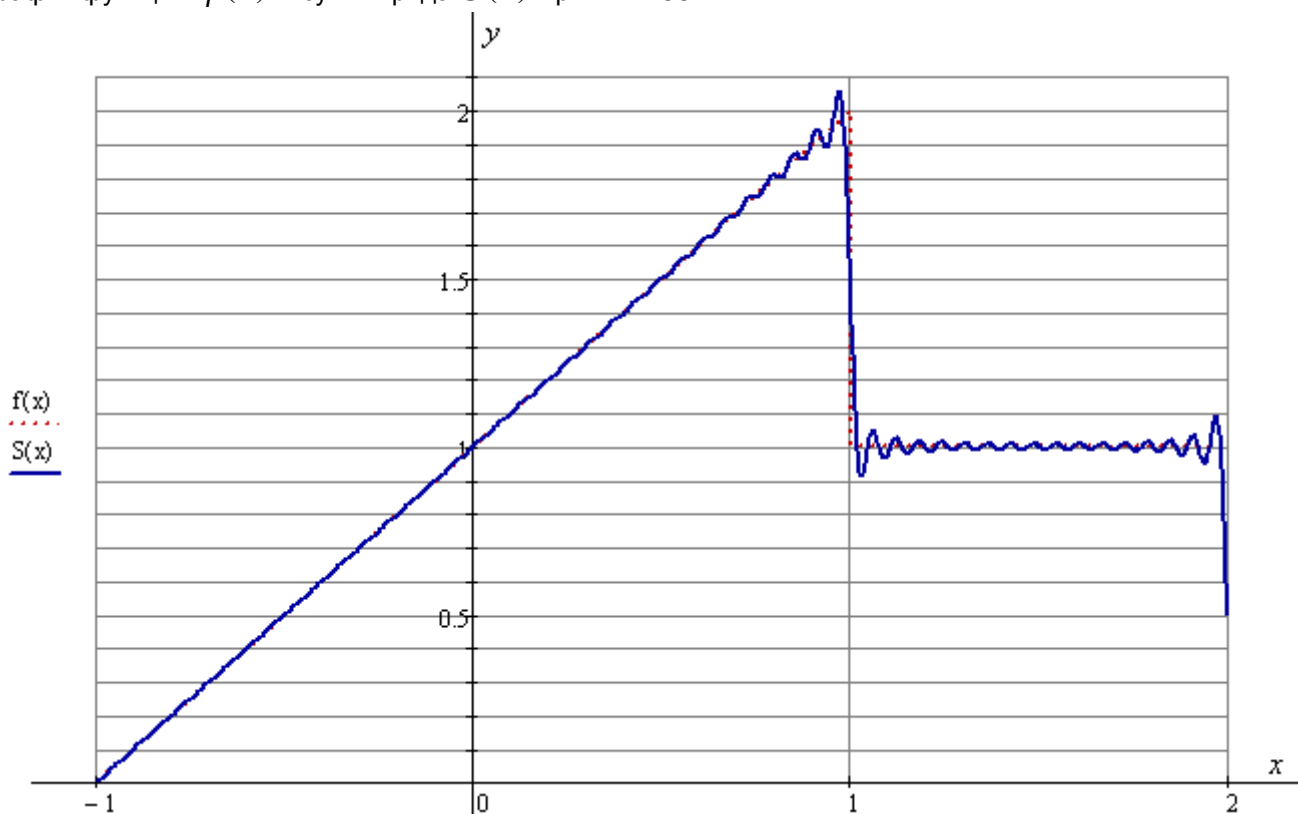
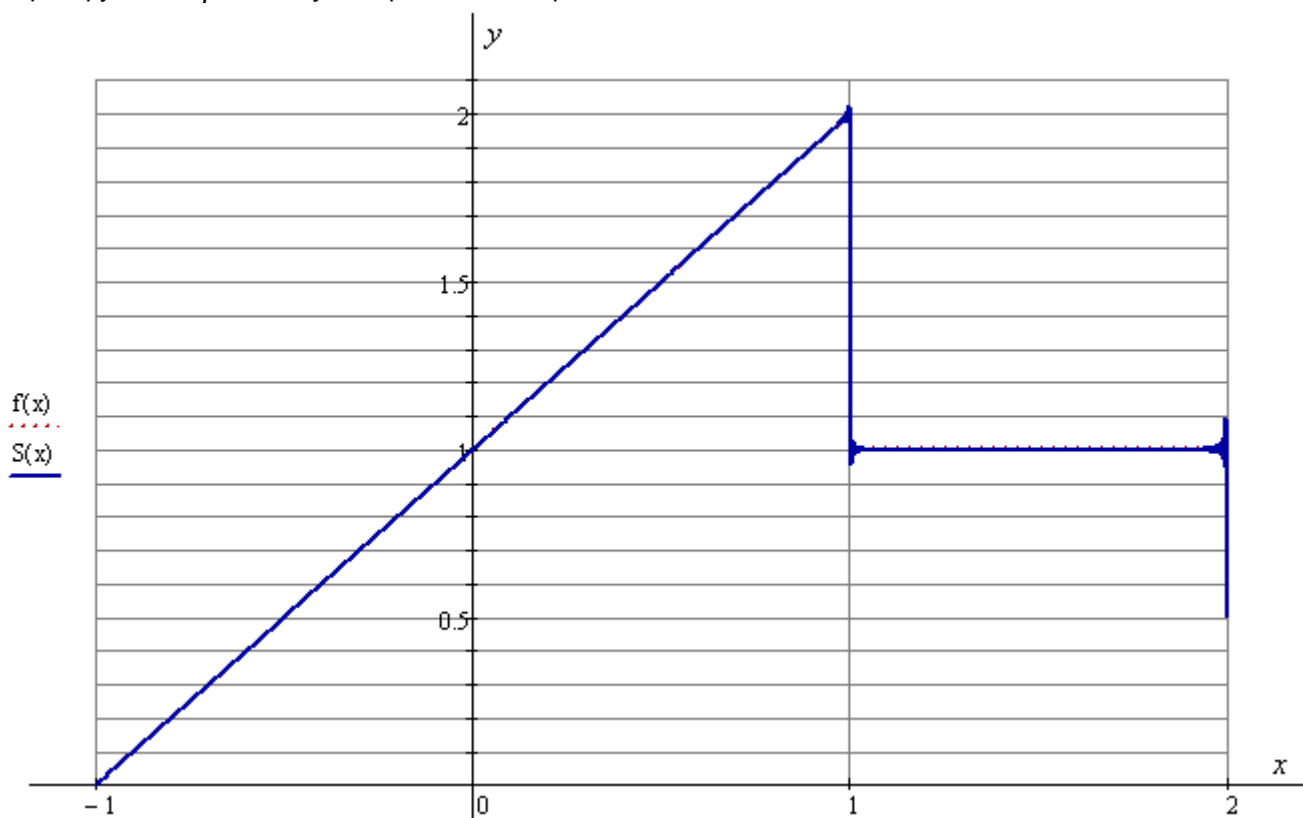


График функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ при $n = 1000$:



Литература:

- 1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 487;
- 2) Пяткова В.Б., Щелкогорова Л.Н. "Математика, 4-й семестр", методичка УрГГУ (г. Екатеринбург), 2007, стр. 22;
- 3) Воробьев Н.Н. "Теория рядов", 2002, стр. 162.