1) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{8}{n^2-8n+15}$$

$$\frac{8}{n^2-8n+15}=\frac{8}{(n-5)(n-3)}=\frac{4}{(n-5)}-\frac{4}{(n-3)}$$

Следовательно

$$\sum_{n=6}^{\infty}\frac{8}{n^2-8n+15}=4\cdot\left(\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-5)}-\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-3)}\right)=4\cdot\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\right)\right]=4\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=6$$

Литература:

1) Аксёнов А.П. "Математика", часть 2, 2005, стр. 245 (пример 3).

2) Исследовать ряд на сходимость и найти сумму ряда

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}$$

► Используем предельный признак сравнения. Ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (обобщённый гармонический ряд сходится при $p>1$).

Исследуем предел отношения членов рядов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot 1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}=1$$

- следовательно, на основании предельного признака сравнения рядов, данный ряд сходится.

► Рассмотрим частичные суммы ряда

$$(n=3)\qquad S_1=\frac{5}{6}\qquad =\frac{3}{2}-\frac{4}{6}=\frac{3}{2}-\frac{4}{2\cdot 3}$$

$$(n=4)\qquad S_2=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}\qquad =\frac{3}{2}-\frac{5}{12}=\frac{3}{2}-\frac{5}{3\cdot 4}$$

$$(n=5)\qquad S_3=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{7}{60}=\frac{6}{5}\qquad =\frac{3}{2}-\frac{6}{20}=\frac{3}{2}-\frac{6}{4\cdot 5}$$

$$(n=6)\qquad S_3=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{7}{60}+\frac{1}{15}=\frac{19}{15}\qquad =\frac{3}{2}-\frac{7}{30}=\frac{3}{2}-\frac{7}{5\cdot 6}$$

$$(n=7)\qquad S_4=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}+\frac{7}{60}+\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{55}{42}\qquad =\frac{3}{2}-\frac{8}{42}=\frac{3}{2}-\frac{8}{6\cdot 7}$$

и заметим, что в общем случае

$$S_n=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{n+3}{(n+1)\cdot(n+2)}\right)=\frac{3}{2}$$

Полученный результат говорит о том, что ряд сходится, и его сумма равна $3/2$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. “Конспект лекций по высшей математике”, 2006, стр. 439 (пример 5);
2) Воробьёв Н.Н. "Теория рядов", 2002, стр. 41 (пример).

3) Найти сумму числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

при $n\to\infty$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$. Этот предел называется суммой сходящегося ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Рассмотрим частичную сумму данного ряда:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Находим сумму ряда:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1$$

Ответ: 1.

Литература:

1) Стёпин В.П. "Высшая математика", методичка СИНХ (Екатеринбург), 2006, стр. 91;
2) Аксёнов А.П. "Математика. Математический анализ", часть 1, 2005, стр. 54 (пример 6);
3) Воробьёв Н.Н. “Теория рядов”, 2002, стр. 41 (пример).