1) Определить область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \cdot x^n$$

► Радиус абсолютной сходимости рассматриваемого степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}}{1} \right) = 1$$

Итак, ряд абсолютно сходится при

$$-1 < x < 1$$

► Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем знакоположительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Поскольку, начиная с $n = 2$, выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то, в соответствии с первым признаком сравнения знакоположительных рядов, исследуемый ряд расходится.

При $x = 1$ имеем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

который сходится, т.к. соответствует достаточному признаку сходимости Лейбница:

а) является знакочередующимся;

б) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots ;$$

в) общий член ряда стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 .$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является полуинтервал $x \in (-1\,;\,1]$.

2) Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} x^n$$

$$a_n = \frac{3^n n!}{(n+1)^n}$$

Радиус абсолютной сходимости рассматриваемого степенного ряда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n n!}{(n+1)^n}\cdot\frac{(n+1+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\right|=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^n}\cdot\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} t=n+1 \\ n\to\infty:\ \ t\to\infty \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\frac{e}{3}$$

(при вычислении предела использован второй замечательный предел)

Итак, ряд абсолютно сходится при

$$-\frac{e}{3}<x<\frac{e}{3}$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

► При $x=-\frac{e}{3}$ имеем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\cdot n!$$

который расходится, т.к. выполняется достаточный признак расходимости ряда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\cdot n!=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2!}{3}\cdot\frac{3!}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)!}{n}\cdot\frac{n!}{(n+1)}\right)^n\cdot e^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1\cdot\frac{1!}{1}\cdot\frac{2!}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)!}{1}\cdot\frac{n!}{(n+1)}\right)^n\cdot e^n=\infty$$

(общий член ряда при $n\to\infty$ стремится к бесконечности)

► При $x=\frac{e}{3}$ имеем знакоположительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n+1}\right)^n\cdot n!$$

который также расходится, поскольку выполняется достаточный признак расходимости ряда.

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является интервал $x\in\left(-\frac{e}{3};\frac{e}{3}\right)$.