Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.
Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.
Теорема. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

1) Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Этот ряд сходится, т.к. обощённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

2) Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n-1)}{\sqrt{2^n+1}}.$$

Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{\sqrt{2^n+1}}$$

Используем достаточный признак сходимости - признак Даламбера, и исследуем предел отношения

$$\boldsymbol{l}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)-1)}{\sqrt{2^{n+1}+1}}\cdot\frac{\sqrt{2^n+1}}{(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\cdot\sqrt{\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}}=\left(\frac{2+0}{2-0}\right)\cdot\sqrt{\frac{1+0}{2+0}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

Поскольку $\boldsymbol{l}<1$, то в соответствии с признаком Даламбера исследуемый ряд сходится.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

3) Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

► Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

Используя предельный признак сравнения рядов, сравним данный ряд с обобщённым гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, который расходится ($p=1/2<1$):

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}$$

Поскольку существует конечный предел отношения n-х членов рядов при $n\to\infty$, то и исследуемый ряд также расходится.

► Знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

сходится, т.к. является лейбницевским (ряд является знакочередующимся, члены ряда по модулю монотонно убывают, общий член ряда стремится к нулю).

► Следовательно, исходный ряд сходится условно.

4) Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n+3)}{3n^2-1}$$

► Исследуем ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{3n^2-1}$$

Используем второй (предельный) признак сравнения знакопостоянных рядов; в качестве эталонного возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+3)}{(3n^2-1)}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)\cdot 1}{\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{(4+0)\cdot 1}{(3-0)}=\frac{4}{3}$$

Предел отношения n-х членов рядов при $n\to\infty$ равен конечному числу, следовательно, исследуемый ряд также расходится.

► Теперь исследуем знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n+3)}{3n^2-1}$.

Данный ряд знакопеременный; проверим его на соответствие достаточному признаку сходимости знакопеременных рядов (признак сходимости Лейбница).

Данный знакочередующийся ряд соответствует достаточному признаку сходимости Лейбница:

а) ряд является знакочередующимся;

б) последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots ;$$

(т.к. знаменатель растёт быстрее, чем числитель)

в) общий член ряда стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{3n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{0+0}{3-0} = 0 .$$

Следовательно, данный ряд сходится.

► Итак, данный ряд сам сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.