► **Теорема** (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

► **Теорема** (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

► **Теорема** (интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;+\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),\ \ldots$, то

а) если $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и исследуемый ряд;

б) если $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится также и исследуемый ряд.

Во всех предыдущих случаях, если $l = 1$, то ряд может сходиться или расходиться; в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

1) Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$$

Используя признак Даламбера, вычислим предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2(n+1)} = 0$$

Поскольку $l < 1$, то в соответствии с признаком Даламбера, исследуемый ряд сходится.

2) Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n + n^2}$$ с помощью признака Даламбера.

Составим варианту Даламбера

$$a_n = \frac{5}{3^n + n^2},\quad a_{n+1} = \frac{5}{3^{n+1} + (n+1)^2}$$

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{3^{n+1} + (n+1)^2} \cdot \frac{3^n + n^2}{5} = \frac{3^n + n^2}{3^{n+1} + (n+1)^2}$$

Найдём предел варианты Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^2}{3^{n+1} + (n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n^2}{3^n}}{3 + \frac{(n+1)^2}{3^n}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3} < 1$$

Так как $d = \frac{1}{3} < 1$, то на основании признака Даламбера, ряд сходится.

3) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}$$

Применим признак Даламбера и вычислим предел

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{n+1}\right)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{rcl} \text{при } n\to\infty: \left(\frac{5}{n+1}\right) \to 0 & \Rightarrow & \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{n+1}\right) \sim \left(\frac{5}{n+1}\right) \\ \left(\frac{5}{n}\right) \to 0 & \Rightarrow & \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{n}\right) \sim \left(\frac{5}{n}\right) \end{array} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{n+1}\right)}{n \cdot \left(\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$l < 1$, следовательно, в соответствии с признаком Даламбера, исследуемый ряд сходится.

4) Пользуясь признаком Даламбера или интегральным признаком, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$$

Применим интегральный признак Коши и вычислим интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx$$

- это несобственный интеграл 1-го рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx = \lim_{\substack{a\to 1+0 \\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{d(\ln x)}{\ln^5 x} = -\frac{1}{4} \cdot \lim_{\substack{a\to 1+0 \\ b\to+\infty}} \frac{1}{\ln^4 x}\Big|_a^b = -\frac{1}{4} \cdot \left(\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln^4 b} - \lim_{a\to 1+0} \frac{1}{\ln^4 a} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot (0 - \infty) = +\infty$$

Поскольку интеграл расходится, то в соответствии с интегральным признаком Коши расходится и ряд.

5) Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)\cdot \ln^8(n+1)} \qquad (*)$$

Заметим, что $\forall n \in N$:

$$\frac{1}{(n+5)\cdot \ln^8(n+1)} < \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^8(n+1)}$$

и выясним сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^8(n+1)}$ (**)

Применим интегральный признак Коши и вычислим интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot \ln^8(x+1)}\,dx$$

- это несобственный интеграл 1-го рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования).

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot \ln^8(x+1)}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln^8(x+1)} = -\frac{1}{7}\cdot \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln^7(x+1)}\Bigg|_1^a =$$

$$= -\frac{1}{7}\cdot\left(\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln^7(a+1)} - \frac{1}{\ln^7(1+1)}\right) = -\frac{1}{7}\cdot\left(0 - \frac{1}{\ln^7 2}\right) = \frac{1}{7\cdot \ln^7 2}$$

Поскольку интеграл сходится, то в соответствии с интегральным признаком Коши сходится и ряд (**).

Все члены ряда (*) меньше соответствующих членов ряда (**), который сходится; следовательно, на основании первого признака сравнения знакоположительных рядов, ряд (*) также сходится.

6) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\cdot \sqrt[3]{\ln(n-3)}}$$

Заметим, что $\forall x \in N$, $x \geq 5$:

$$\frac{1}{(n-2)\cdot \sqrt[3]{\ln(n-3)}} > \frac{1}{(n-2)\cdot \sqrt[3]{\ln(n-2)}}$$

Теперь исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\cdot \sqrt[3]{\ln(n-2)}} \qquad (*)$$

Применим интегральный признак Коши-Маклорена:

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{(x-2)\cdot\left(\ln(x-2)\right)^{\frac{1}{3}}} = \left[\begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix}\right] = \int_3^{\infty} \frac{dt}{t\cdot(\ln t)^{\frac{1}{3}}} = \int_3^{\infty} \frac{d(\ln t)}{(\ln t)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(\ln t)^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{2}{3}\right)}\Bigg|_3^{\infty} = \infty$$

- следовательно, ряд (*) расходится; в соответствии с первым признаком сравнения рядов расходится и исходный ряд.

7) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$$

Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}-\frac{19}{5\cdot(5n+1)}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{19}{4\cdot(5n+1)}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{19}{4\cdot(5n+1)}\right)^{n}=0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{19}{4\cdot(5n+1)}\right)^{n}=0<1$$

(здесь второй множитель можно вычислить через 2-й замечательный предел, но это не потребовалось, т.к. первый множитель равен 0)

Поскольку вычисленный предел меньше 1, то исследуемый ряд сходится.

8) Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Применим интегральный признак Коши и вычислим интеграл:

$$\int_{3}^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx$$

- это несобственный интеграл 1-го рода (интеграл с бесконечным промежутком интегрирования).

Вычислим неопределённый интеграл методом интегрирования по частям; при вычислении примем во внимание, что $x>0$:

$$\boldsymbol{I}=\int\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\left[\begin{array}{l}u=\ln(x+1)\\du=\dfrac{dx}{x+1}\\dv=\dfrac{dx}{x+1}\\v=\ln|x+1|\end{array}\right]=uv+\int vdu=\ln^2(x+1)-\int\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\ln^2(x+1)-\boldsymbol{I}$$

откуда

$$\boldsymbol{I}=\int\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\frac{\ln^2(x+1)}{2}=\ln^2\sqrt{x+1}$$

и

$$\int_{3}^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{3}^{a}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}dx=\lim_{a\to+\infty}\ln^2\sqrt{x+1}\Big|_{3}^{a}=$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\ln^2\sqrt{a+1}-\ln^2\sqrt{3+1}=\left[+\infty-\ln^2 2\right]=+\infty$$

Поскольку интеграл расходится, то в соответствии с интегральным признаком Коши расходится и исследуемый ряд.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2007, стр. 444;

2) Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. "Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента", том 2, 2003, стр. 11 (пример 23).