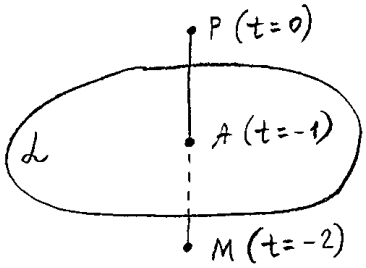
Геометрия в пространстве.

Симметричные точки.

1) Даны плоскость с уравнением $8x-5y-4z-109=0$ и точка $P(17;-10;-7)$. Найти точку, симметричную P относительно данной плоскости.



1-й способ решения.

Обозначим данную плоскость α, искомую точку M; проведём прямую PM. В качестве её направляющего вектора используем нормальный вектор плоскости α, т.е. $\vec{n}=(8;-5;-4)$:

$$\frac{x-x_P}{n_x}=\frac{y-y_P}{n_y}=\frac{z-z_P}{n_z}$$

$$\frac{x-17}{8}=\frac{y-(-10)}{-5}=\frac{z-(-7)}{-4}$$

$$\frac{x-17}{8}=\frac{y+10}{-5}=\frac{z+7}{-4}$$

Точка $A=PM\cap\alpha$ пересечения прямой PM с плоскостью α определяется системой:

$$\begin{cases} 8x-5y-4z-109=0 \\ \dfrac{x-17}{8}=\dfrac{y+10}{-5}=\dfrac{z+7}{-4} \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой в параметрическом виде и найдём значение параметра t, соответствующее точке A:

$$x=8t+17$$

$$y=-5t-10$$

$$z=-4t-7$$

$$8\cdot(8t+17)-5\cdot(-5t-10)-4\cdot(-4t-7)-109=0$$

$$105t+105=0$$

$$t=-1$$

Заметим, что точке P соответствует значение параметра, равное $t=0$. Поскольку точка M симметрична точке P относительно точки A, то, очевидно, ей соотвествует значение параметра $t=-2$. Так что

$$x_M=8\cdot(-2)+17=1$$

$$y_M=-5\cdot(-2)-10=0$$

$$z_M=-4\cdot(-2)-7=1$$

Итак, $M(1;0;1)$.

2-й способ решения.

► Задана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $P(x_P;\ y_P;\ z_P)$. Найдём точку $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, симметричную точке P относительно данной плоскости. Введём вспомогательный множитель

$$k=-\frac{Ax_P+By_P+Cz_P+D}{A^2+B^2+C^2},$$

тогда

$$x_M=x_P+2k\cdot A$$
$$y_M=y_P+2k\cdot B$$
$$z_M=z_P+2k\cdot C$$

Вычисляем вспомогательный множитель

$$k=-\frac{8\cdot 17-5\cdot(-10)-4\cdot(-7)-109}{8^2+(-5)^2+(-4)^2}=-\frac{105}{105}=-1$$

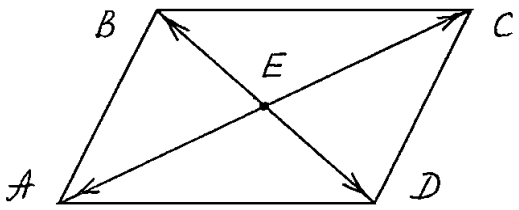
и

$$x_M=17-2\cdot 8=1$$
$$y_M=-10-2\cdot(-5)=0$$
$$z_M=-7-2\cdot(-4)=1$$

Итак, $M(1;0;1)$.

2) Даны радиус-векторы трёх последовательных вершин параллелограмма $ABCD$. Найти радиус-вектор четвёртой вершины и косинусы углов между диагоналями параллелограмма, если известно, что

$$\vec{r}_A=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_B=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+5\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_C=7\vec{e}_1+9\vec{e}_2+11\vec{e}_3$$



► План действий:

1. Зададим вершины параллелограмма их координатами.
   Найдём середину диагонали AC; назовём эту точку E.
   Найдём точку, симметричную точке B относительно точки E - это и есть искомая вершина D.
   Запишем результат в виде радиус-вектора $\vec{r}_D$.
2. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{EB}$; вычислим $\cos\widehat{AEB}$ между диагоналями.
   $\widehat{AEB}$ и $\widehat{CED}$ - вертикальные, поэтому $\cos\widehat{CED}=\cos\widehat{AEB}$.
   $\widehat{AEB}$ и $\widehat{BEC}$ - смежные, поэтому $\cos\widehat{BEC}=\cos(\pi-\widehat{AEB})=-\cos\widehat{AEB}$.
   $\widehat{BEC}$ и $\widehat{DEA}$ - вертикальные; поэтому $\cos\widehat{DEA}=\cos\widehat{BEC}$.

► Координаты известных вершин параллелограмма есть координаты соответствующих радиус-векторов:

$$A(1;1;1)$$
$$B(1;3;5)$$
$$C(7;9;11)$$

Координаты середины отрезка AC (точка E) есть среднее арифметическое координат концов отрезка:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

$$z_E = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+11}{2} = 6$$

Точки B и D равноудалены от точки E, находятся по разные стороны от неё, а также эти три точки лежат на одной прямой; следовательно:

$$\begin{cases} x_B - x_E = x_E - x_D \\ y_B - y_E = y_E - y_D \\ z_B - z_E = z_E - z_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-4 = 4 - x_D \\ 3-5 = 5 - y_D \\ 5-6 = 6 - z_D \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = 7 \\ z_D = 7 \end{cases}$$

Итак, $D(7;7;7)$ и радиус-вектор вершины D:

$$\vec{r}_D = 7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$$

► Рассмотрим векторы $\overrightarrow{EA}$ и $\overrightarrow{EB}$:

$$\overrightarrow{EA} = (1-4;\ 1-5;\ 1-6) = (-3;-4;-5)$$

$$\overrightarrow{EB} = (1-4;\ 3-5;\ 5-6) = (-3;-2;-1)$$

$$\cos\widehat{AEB} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}}\right) = \frac{\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}}{\left|\overrightarrow{EA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EB}\right|} =$$

$$= \frac{-3\cdot(-3) - 4\cdot(-2) - 5\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{22}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = \frac{11}{5\sqrt{7}} = \frac{11\sqrt{7}}{35}$$

$$\cos\widehat{BEC} = -\cos\widehat{AEB} = -\frac{11\sqrt{7}}{35}$$

$$\cos\widehat{CED} = \cos\widehat{AEB} = \frac{11\sqrt{7}}{35}$$

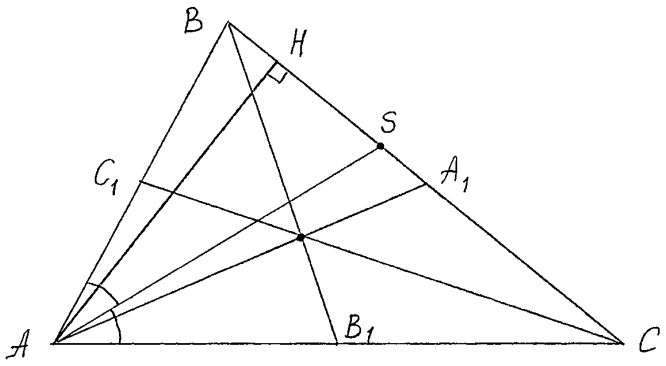
$$\cos\widehat{DEA} = \cos\widehat{BEC} = -\frac{11\sqrt{7}}{35}$$

Ответ: $\vec{r}_D = 7\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$

$$\cos\widehat{AEB} = \cos\widehat{CED} = \frac{11\sqrt{7}}{35}$$

$$\cos\widehat{BEC} = \cos\widehat{DEA} = -\frac{11\sqrt{7}}{35}$$

3) Даны вершины треугольника $A(6;5;-5)$, $B(9;6;-2)$, $C(8;7;2)$.
Найти:
а) уравнения всех его медиан;
б) координаты точки пересечения медиан;
в) уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A;
г) уравнение высоты, проведённой из вершины A.



AA_1, BB_1, CC_1 - медианы;
M - точка пересечения медиан;
AS - биссектриса;
AH - высота.

а)

Точки A_1, B_1, C_1 - середины сторон BC, AC, AB соответственно, поэтому

$$\begin{cases} x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{9+8}{2} = 8,5 \\ y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{6+7}{2} = 6,5 \\ z_{A_1} = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B_1} = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{6+8}{2} = 7 \\ y_{B_1} = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6 \\ z_{B_1} = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-5+2}{2} = -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{C_1} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{6+9}{2} = 7,5 \\ y_{C_1} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+6}{2} = 5,5 \\ z_{C_1} = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-5-2}{2} = -3,5 \end{cases}$$

Уравнения медиан AA_1, BB_1, CC_1 - уравнения одноимённых прямых, т.е. прямых, проходящих через точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 соответственно.

Уравнение прямой AA_1:

$$\frac{x - x_A}{x_{A_1} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{A_1} - y_A} = \frac{z - z_A}{z_{A_1} - z_A}$$

$$\frac{x-6}{8,5-6} = \frac{y-5}{6,5-5} = \frac{z-(-5)}{0-(-5)}$$

$$\frac{x-6}{2,5}=\frac{y-5}{1,5}=\frac{z+5}{5}$$

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+5}{10}$$ - уравнение медианы AA_1.

Уравнение прямой BB_1:

$$\frac{x-x_B}{x_{B_1}-x_B}=\frac{y-y_B}{y_{B_1}-y_B}=\frac{z-z_B}{z_{B_1}-z_B}$$

$$\frac{x-9}{7-9}=\frac{y-6}{6-6}=\frac{z-(-2)}{-1,5-(-2)}$$

$$\frac{x-9}{-2}=\frac{y-6}{0}=\frac{z+2}{0,5}$$

$$\frac{x-9}{-4}=\frac{y-6}{0}=\frac{z+2}{1}$$ - уравнение медианы BB_1 (прямая находится в плоскости $y=6$).

Уравнение прямой CC_1:

$$\frac{x-x_C}{x_{C_1}-x_C}=\frac{y-y_C}{y_{C_1}-y_C}=\frac{z-z_C}{z_{C_1}-z_C}$$

$$\frac{x-8}{7,5-8}=\frac{y-7}{5,5-7}=\frac{z-2}{-3,5-2}$$

$$\frac{x-8}{-0,5}=\frac{y-7}{-1,5}=\frac{z-2}{-5,5}$$

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-2}{11}$$ - уравнение медианы CC_1.

б)

Точку пересечения медиан M найдём как результат пересечения любых двух медиан, например, AA_1 и BB_1.

$$\begin{cases}\frac{x-6}{5}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+5}{10}\\ \frac{x-9}{-4}=\frac{y-6}{0}=\frac{z+2}{1}\end{cases}$$

Из 2-го уравнения системы имеем $y=6$.

Тогда из 1-го уравнения системы получаем $x=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$ и $z=-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$.

Итак, $M\left(7\frac{2}{3};\,6;\,-1\frac{2}{3}\right)$.

в)

Уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A.

Поскольку биссектриса разделяет сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то

$$\frac{BS}{SC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(6-9)^2+(5-6)^2+(-5-(-2))^2}}{\sqrt{(6-8)^2+(5-7)^2+(-5-2)^2}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{57}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Переходя к координатам, получаем систему уравнений:

$$\frac{x_B - x_S}{x_S - x_C} = \frac{y_B - y_S}{y_S - y_C} = \frac{z_B - z_S}{z_S - z_C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{9 - x_S}{x_S - 8} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{6 - y_S}{y_S - 7} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{-2 - z_S}{z_S - 2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{19}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y_S = \dfrac{11}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_S = 2\sqrt{3} - 4 \end{cases}$$

Уравнение прямой AS (биссектрисы) - уравнение прямой, проходящей через точки A и S:

$$\frac{x - x_A}{x_S - x_A} = \frac{y - y_A}{y_S - y_A} = \frac{z - z_A}{z_S - z_A}$$

$$\frac{x - 6}{\frac{19}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 6} = \frac{y - 5}{\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 5} = \frac{z - (-5)}{2\sqrt{3} - 4 - (-5)}$$

$$\frac{x - 6}{19 - \sqrt{3} - 12} = \frac{y - 5}{11 + \sqrt{3} - 10} = \frac{z + 5}{4\sqrt{3} - 8 + 10}$$

$$\frac{x - 6}{7 - \sqrt{3}} = \frac{y - 5}{1 + \sqrt{3}} = \frac{z + 5}{2 + 4\sqrt{3}}$$ - уравнение биссектрисы AM в каноническом виде.

г)

Уравнение высоты, проведённой из вершины A - уравнение прямой, перпендикулярной прямой BC.

$$\overrightarrow{BC} = (8 - 9\ ;\ 7 - 6\ ;\ 2 - (-2)) = (-1; 1; 4)$$

$$\overrightarrow{AH} = (x_H - 6\ ;\ y_H - 5\ ;\ z_H - (-5)) = (x_H - 6\ ;\ y_H - 5\ ;\ z_H + 5)$$

Поскольку $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = -1 \cdot (x_H - 6) + 1 \cdot (y_H - 5) + 4 \cdot (z_H + 5) = -x_H + y_H + 4z_H + 21 = 0$$

Пусть точка H - произвольная точка прямой AH, не совпадающая с точкой A. Если положить $y_H = 0$, $z_H = 0$, то $x_H = 21$; и теперь можно записать уравнение прямой AH как уравнение прямой, проходящей через точку $A(6; 5; -5)$ и имеющей направляющий вектор

$$\overrightarrow{AH} = (21 - 6\ ;\ 0 - 5\ ;\ 0 + 5) = (15; -5; 5)$$

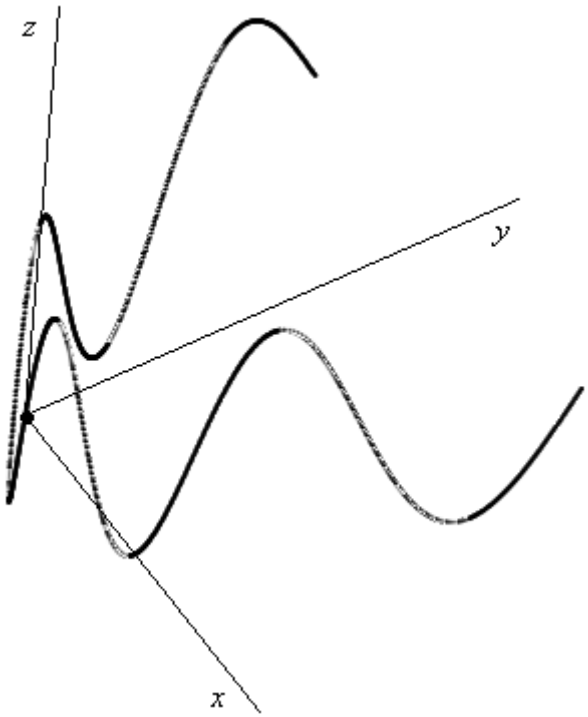
$$\frac{x - 6}{15} = \frac{y - 5}{-5} = \frac{z - (-5)}{5}$$

$$\frac{x - 6}{3} = \frac{y - 5}{-1} = \frac{z + 5}{1}$$ - уравнение высоты AH в каноническом виде.

4) Даны поверхность $2x^2 + y^2 = 1$ и кривая $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sin t \end{cases}$. Найти углы между ними в точках их пересечения. В этих же точках написать уравнение плоскости, касательной к поверхности.

Поверхность $2x^2 + y^2 = 1$ - эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

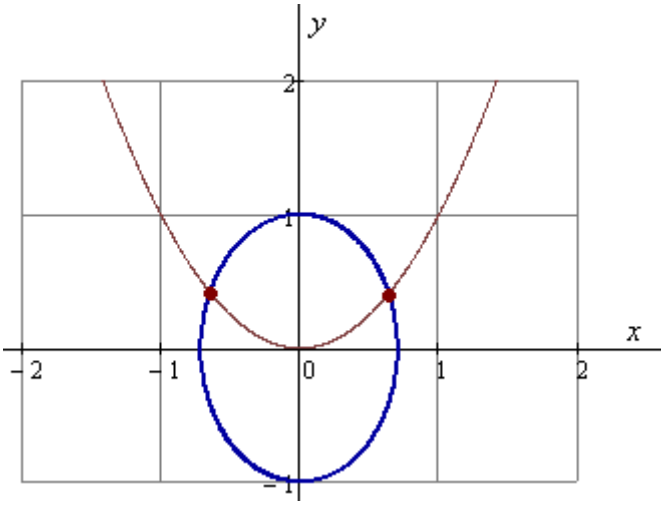
Кривая $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sin t \end{cases}$ - парабола, деформированная синусоидой (или синусоида, изогнутая по параболе):



Найдём точки пересечения поверхности и линии. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sin t \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Заметим, что в проекции на плоскость xOy:



и систему можно упростить:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ y_1 = \sqrt{2}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ y_2 = \sqrt{2}-1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Найдены две точки пересечения поверхности и линии:

$M_1\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ \sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$, при этом $t_1 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$;

$M_2\left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ -\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$, при этом $t_2 = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Решение системы в Mathcad 14:

$$\begin{pmatrix} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sin(t) \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{pmatrix} \text{solve},t,x,y,z \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} & \sqrt{\sqrt{2}-1} & \sqrt{2}-1 & \sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \\ \sqrt{-\sqrt{2}-1} & \sqrt{-\sqrt{2}-1} & -\sqrt{2}-1 & \sin\left(\sqrt{-\sqrt{2}-1}\right) \\ -\sqrt{\sqrt{2}-1} & -\sqrt{\sqrt{2}-1} & \sqrt{2}-1 & -\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \\ -\sqrt{-\sqrt{2}-1} & -\sqrt{-\sqrt{2}-1} & -\sqrt{2}-1 & -\sin\left(\sqrt{-\sqrt{2}-1}\right) \end{pmatrix}$$

(здесь две точки из четырёх - комплексные)

Уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_0:

$$F'_x \cdot (x - x_0) + F'_y \cdot (y - y_0) + F'_z \cdot (z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали в точке M_0:

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$$

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_1} = 4 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_2} = -4 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_1} = 2 \cdot (\sqrt{2}-1) \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_2} = 2 \cdot (\sqrt{2}-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_1} = 0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_2} = 0$$

► Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_1\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ \sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$.

$$F'_x \cdot (x - x_1) + F'_y \cdot (y - y_1) + F'_z \cdot (z - z_1) = 0$$

$$4 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \left(x - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right) - 2 \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot \left(y - (\sqrt{2}-1)\right) + 0 \cdot \left(z - \sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right) = 0$$

$$2 \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \left(x - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right) - (\sqrt{2}-1) \cdot \left(y - (\sqrt{2}-1)\right) = 0$$

$$x \cdot 2\sqrt{\sqrt{2}-1} + y \cdot (1 - \sqrt{2}) + (5 - 4\sqrt{2}) = 0$$

- общее уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_1.

► Уравнение нормали к данной поверхности в точке $M_1\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ \sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$.

$$\frac{x-x_1}{F'_x}=\frac{y-y_1}{F'_y}=\frac{z-z_1}{F'_z}$$

$$\frac{x-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{y-\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{z-\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}{0}$$

$$\frac{x-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{y-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{z-\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}{0}$$

- каноническое уравнение нормали к поверхности в точке M_1

(прямая находится в плоскости $z=\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ и перпендикулярна оси Oz)

Направляющий вектор нормали $\vec{n}_1=\left(2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ 0\right)$.

► Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_2\left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ -\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$.

$$F'_x\cdot\left(x-x_2\right)+F'_y\cdot\left(y-y_2\right)+F'_z\cdot\left(z-z_2\right)=0$$

$$-4\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\left(x+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)-2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(y-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)+0\cdot\left(z+\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)=0$$

$$-2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\left(x+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(y-\left(\sqrt{2}-1\right)\right)=0$$

$$x\cdot 2\sqrt{\sqrt{2}-1}+y\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)-1=0$$

- общее уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M_2.

► Уравнение нормали к данной поверхности в точке $M_2\left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ -\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\right)$.

$$\frac{x-x_2}{F'_x}=\frac{y-y_2}{F'_y}=\frac{z-z_2}{F'_z}$$

$$\frac{x+\sqrt{\sqrt{2}-1}}{-4\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{y-\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{z+\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}{0}$$

$$\frac{x+\sqrt{\sqrt{2}-1}}{-2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{y-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{z+\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}{0}$$

- каноническое уравнение нормали к поверхности в точке M_2

(прямая находится в плоскости $z=\sin\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ и перпендикулярна оси Oz)

Направляющий вектор нормали $\vec{n}_2=\left(-2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ 0\right)$.

► Найдём угол φ, под которым линия пересекает поверхность.

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, то направляющий вектор касательной к кривой

$$\vec{s}=\left(\frac{dx(t)}{dt}\ ;\ \frac{dy(t)}{dt}\ ;\ \frac{dz(t)}{dt}\right).$$

Для кривой $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sin t \end{cases}$ получаем $\vec{s} = (1\ ;\ 2t\ ;\ \cos t)$.

В точке M_1, для которой $t_1 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, имеем $\vec{s}_1 = \left(1\ ;\ 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

В точке M_2, для которой $t_2 = -\sqrt{\sqrt{2}-1}$, имеем $\vec{s}_2 = \left(1\ ;\ -2\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

Угол φ между прямой (кривой) с направляющим вектором $\vec{s}$ и плоскостью (поверхностью) с нормалью $\vec{n}$:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$\vec{n}_1 = \left(2\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ 0\right)$$

$$\vec{s}_1 = \left(1\ ;\ 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{n}_1|} = \frac{\left|1\cdot 2\sqrt{\sqrt{2}-1} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + 4\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{4\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{4\sqrt{2}-3+\cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{4\sqrt{2}-3+\cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\right) \approx 0{,}835\ (\text{рад}) \approx 47^\circ 51'$$

$$\vec{n}_2 = \left(-2\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ 0\right)$$

$$\vec{s}_2 = \left(1\ ;\ -2\sqrt{\sqrt{2}-1}\ ;\ \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{|\vec{s}_2\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{s}_2|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{\left|-1\cdot 2\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \cos\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + 4\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{4\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{4\sqrt{2}-3+\cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{4\sqrt{2}-3+\cos^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}\cdot\sqrt{2\sqrt{2}-1}}\right) \approx 0{,}835\ (\text{рад}) \approx 47^\circ 51'$$

Литература:

1) Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. "Геометрия", 2003, стр. 303 (касательная плоскость и нормаль к поверхности), стр. 253 (касательная к кривой);

2) http//ru.wikipedia.org/wiki/Кривая второго порядка.

5) Найти прямые, которые проходят через точку $A(6;2;8)$ и лежат на поверхности

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$$

Напишем уравнение гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1-\frac{y^2}{4}$$

и разложим левую и правую части уравнения на множители:

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=\left(1-\frac{y}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{2}\right)$$

тогда на гиперболоиде лежат прямые общее уравнение которых можно записать в виде

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=a\cdot\left(1+\frac{y}{2}\right)\\ a\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1-\frac{y}{2}\right)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=b\cdot\left(1-\frac{y}{2}\right)\\ b\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=\left(1+\frac{y}{2}\right)\end{cases}$$

здесь a и b - некоторые параметры изменение которых даёт множество образующих.

Удостоверившись, что точка A лежит на гиперболоиде, из двух множеств прямых выберем те, что проходят через эту точку. Для этого подставим координаты точки в уравнение прямых. Получим $a=2$, b не определено. Имеем

$$\begin{cases}4x-12y+3z=2\\ 4x+3y-3z=6\end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x-6}{9}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-8}{20}$$ - уравнение искомой прямой.

6) Найти проекцию на плоскость xOy ($z=0$) линию пересечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$$ и плоскости $z+4y-4=0$.

Для решения задачи исключим переменную z из уравнения эллипсоида с помощью уравнения плоскости, и получим

$$x^2+2y^2-4x=0 \quad \text{или} \quad \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.$$

Откуда следует, что проекцией будет эллипс.