1) Даны координаты вершин пирамиды:

$A_1(0;3;-2)$

$A_2(1;1;0)$

$A_3(4;-1;-4)$

$A_4(3;7;-7)$

Требуется средствами векторной алгебры найти:

а) угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$;

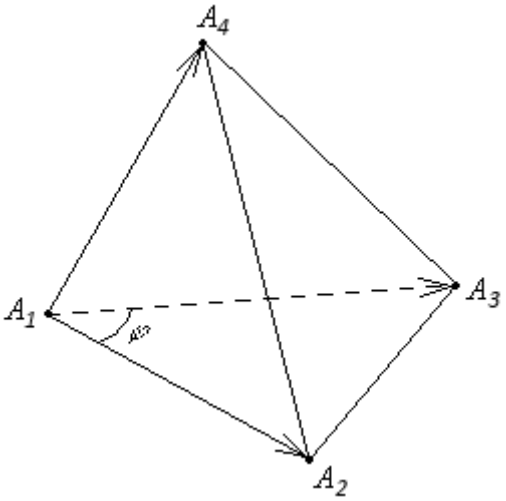
б) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) проекцию вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$;

д) объём пирамиды.

Эскиз к задаче:



Сделаем предварительные вычисления:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(1-0\,;\,1-3\,;\,0-(-2))=(1;-2;2) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(4-0\,;\,-1-3\,;\,-4-(-2))=(4;-4;-2) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=6$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=(3-0\,;\,7-3\,;\,-7-(-2))=(3;4;-6) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-6)^2}=\sqrt{61}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=1\cdot4-2\cdot(-4)+2\cdot(-2)=8$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 4 & -4 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(4+8)-\vec{j}\cdot(-2-8)+\vec{k}\cdot(-4+8)=12\vec{i}+10\vec{j}+4\vec{k}=(12;10;4)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\;\overrightarrow{A_1A_3}\;\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 4 & -4 & -2\\ 3 & 4 & -6\end{vmatrix}=1\cdot(24+8)-(-2)\cdot(-24+6)+2\cdot(16+12)=52$$

а)

Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ (обозначим его φ) найдём, используя формулу скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}$$

$$\varphi = \arccos\frac{4}{9} \approx 1{,}110\ (рад) \approx 63^\circ 37'$$

б)

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости с нормальным вектором $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = (12;10;4)$ и проходящей через точку например $A_2(1;1;0)$.

$$12\cdot(x-1)+10\cdot(y-1)+4\cdot(z-0)=0$$

$$12x-12+10y-10+4z=0$$

$$12x+10y+4z-22=0$$

$$6x+5y+2z-11=0$$

- общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

в)

Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдём через векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = (12;10;4)$:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12^2+10^2+4^2} = \sqrt{65}$$ (кв. ед.)

г)

Проекцию вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ найдём по формуле

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$ (проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$)

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{A_1A_2}}\,\overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

д)

Объём пирамиды найдём через смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\cdot 52 = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$ (куб. ед.)

2) Даны четыре точки $A_1(5;5;4)$, $A_2(1;-1;4)$, $A_3(3;5;1)$, $A_4(5;8;-1)$. Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$;

б) прямой A_1A_2;

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

а)

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-5 & z-4 \\ 1-5 & -1-5 & 4-4 \\ 3-5 & 5-5 & 1-4 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-5 & z-4 \\ -4 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-5)\cdot(18-0)-(y-5)\cdot(12-0)+(z-4)\cdot(0-12)=0$$

$$18x-12y-12z+18=0$$

$3x-2y-2z+3=0$ - общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

б)

Уравнение прямой A_1A_2 - уравнение прямой, проходящей через точки $A_1(5;5;4)$ и $A_2(1;-1;4)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-5}{1-5}=\frac{y-5}{-1-5}=\frac{z-4}{4-4}$$

$$\frac{x-5}{-4}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z-4}{0}$$

$\frac{x-5}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{0}$ - каноническое уравнение прямой A_1A_2.

Здесь ноль в знаменателе третьей дроби не означает деление на ноль, а является общепринятой формальностью записи канонического уравнения прямой и отражает лишь тот факт, что данная прямая лежит в плоскости $z=4$.

Это очевидно, если преобразовать каноническое уравнение прямой к параметрическому виду:

$$\begin{cases} x=2t+5 \\ y=3t+5 \\ z=4 \end{cases}$$

в)

Составляем уравнение прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$. В качестве направляющего вектора искомой прямой примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, координаты которого пропорциональны коэффициентам при переменных в общем уравнении плоскости:

$$\vec{n}=(3;-2;-2).$$

В то же время прямая проходит через точку $A_4(5;8;-1)$, следовательно, её уравнение

$$\frac{x-x_4}{x_n}=\frac{y-y_4}{y_n}=\frac{z-z_4}{z_n}$$

$\frac{x-5}{3}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ - каноническое уравнение прямой A_4M ($A_4M\perp A_1A_2A_3$).

г)

Составляем уравнение прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2. В качестве направляющего вектора искомой прямой примем направляющий вектор прямой A_1A_2, координаты которого пропорциональны коэффициентам в каноническом уравнении этой прямой:

$$\vec{s}=(2;3;0).$$

В то же время прямая проходит через точку $A_3(3;5;1)$, следовательно, её уравнение

$$\frac{x-x_3}{x_s}=\frac{y-y_3}{y_s}=\frac{z-z_3}{z_s}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{0}$$ - каноническое уравнение прямой A_3N ($A_3N \parallel A_1A_2$).

д)

Составляем уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2. В данном случае нормальным вектором искомой плоскости будет направляющий вектор прямой A_1A_2:

$$\vec{s}=(2;3;0).$$

В то же время плоскость проходит через точку $A_4(5;8;-1)$, следовательно, её уравнение

$$x_s\cdot(x-x_4)+y_s\cdot(y-y_4)+z_s\cdot(z-z_4)=0$$

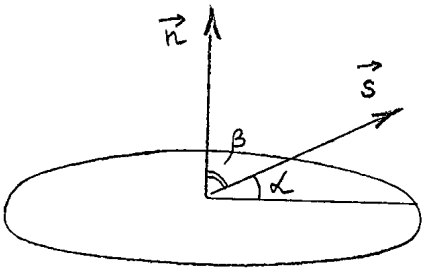
$$2\cdot(x-5)+3\cdot(y-8)+0\cdot(z+1)=0$$

$2x+3y-34=0$ - общее уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.

Полученное уравнение плоскости не содержит переменной z, т.к. плоскость параллельна оси Oz.

е)

Вычисляем синус угла между прямой A_1A_2 и плоскостью $A_1A_2A_3$.



Заметим, что $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\beta$, а угол β - острый угол между нормальным вектором $\vec{n}=(3;-2;-2)$ плоскости $A_1A_2A_3$ и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}=(5-5\ ;\ 8-5\ ;\ -1-4)=(0;3;-5)$.

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{\left|3\cdot0-2\cdot3-2\cdot(-5)\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{17}$$

ж)

Вычисляем косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$. Угол, о котором идёт речь, равен острому углу между нормальными векторами рассматриваемых плоскостей.

$$\vec{n}_1=(0;0;1)$$

$$\vec{n}_2=(3;-2;-2)$$

$$\cos\gamma=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|0\cdot3+0\cdot(-2)+1\cdot(-2)\right|}{1\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{17}}$$

3) По координатам вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$

$$A_1(0;-1;2),\ A_2(-1;-1;6),\ A_3(-2;0;2),\ A_4(0;1;4)$$

найти:

а) длину ребра A_1A_3,

б) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4,

в) площадь грани $A_1A_2A_3$,

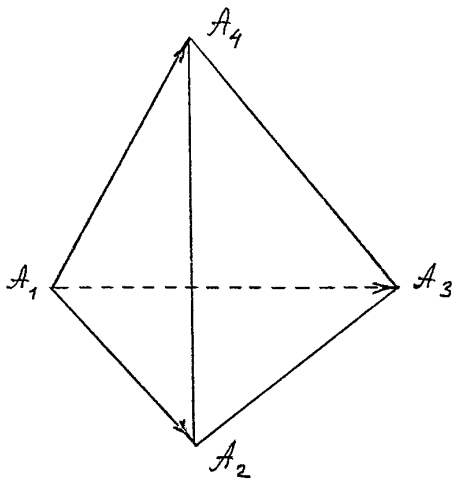
г) объём пирамиды,

д) уравнения прямых A_1A_2 и A_1A_3,

е) уравнения плоскостей $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$,

ж) угол между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

Сделаем к задаче эскиз:



Сделаем предварительные вычисления.

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-1-0\ ;\ -1-(-1)\ ;\ 6-2)=(-1;0;4) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2-0\ ;\ 0-(-1)\ ;\ 2-2)=(-2;1;0) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=(0-0\ ;\ 1-(-1)\ ;\ 4-2)=(0;2;2) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

а)

Длину ребра A_1A_3 получим как длину вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$A_1A_3=\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{5}$$

б)

Обозначим φ угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4, и найдём его через формулу скалярного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{-1\cdot0+0\cdot2+4\cdot2}{\sqrt{17}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{34}}{17}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{2\sqrt{34}}{17}\right)\approx0{,}815\ (рад.)\approx46^\circ41'$$

в)

Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдём как площадь треугольника через векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(0-4)-\vec{j}\cdot(0+8)+\vec{k}\cdot(-1-0)=-4\cdot\vec{i}-8\cdot\vec{j}-\vec{k}$$

$$S\left(\triangle A_1A_2A_3\right)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-1)^2}=\frac{9}{2}=4{,}5 \text{ (кв. ед.)}$$

г)

Объём пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдём через смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(2-0)+4\cdot(-4-0)=-2-16=-18$$

$$V\left(A_1A_2A_3A_4\right)=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|-18\right|=3 \text{ (куб. ед.)}$$

д)

Уравнения прямой A_1A_2 - уравнение прямой, имеющей направляющий вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(-1;0;4)$ и проходящей через точку $A_1(0;-1;2)$:

$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{4}$ - каноническое уравнение прямой A_1A_2 (прямая находится в плоскости $y=-1$).

Уравнения прямой A_1A_3 - уравнение прямой, имеющей направляющий вектор $\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;1;0)$ и проходящей через точку $A_1(0;-1;2)$:

$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{0}$ - каноническое уравнение прямой A_1A_3 (прямая находится в плоскости $z=2$).

е)

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x-0 & y-(-1) & z-2\\ -1-0 & -1-(-1) & 6-2\\ -2-0 & 0-(-1) & 2-2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x & y+1 & z-2\\ -1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$x\cdot(0-4)-(y+1)\cdot(0+8)+(z-2)\cdot(-1-0)=0$$

$$-4x-8y-z-6=0$$

$4x+8y+z+6=0$ - общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_4$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-(-1) & z-2 \\ -1-0 & -1-(-1) & 6-2 \\ 0-0 & 1-(-1) & 4-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$x\cdot(0-8)-(y+1)\cdot(-2-0)+(z-2)\cdot(-2-0)=0$$

$$-8x+2y-2z+6=0$$

$4x-y+z-3=0$ - общее уравнение плоскости $A_1A_2A_4$.

ж)

Угол α между плоскостями $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ найдём как острый ($\cos\alpha>0$) угол между их нормальными векторами, координаты которых можно взять из общих уравнений плоскостей:

$$\vec{n}_1=(4;8;1)$$

$$\vec{n}_2=(4;-1;1)$$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|4\cdot4+8\cdot(-1)+1\cdot1|}{\sqrt{4^2+8^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\approx 1,333\ (рад.)\approx 76^\circ 22'$$

4) Даны координаты вершин пирамиды

$A_1(-1;-2;1)$

$A_2(-2;-2;5)$

$A_3(-3;-1;1)$

$A_4(-1;0;3)$

Найти:

а) длину ребра A_1A_2;

б) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

г) площадь грани $A_1A_2A_3$;

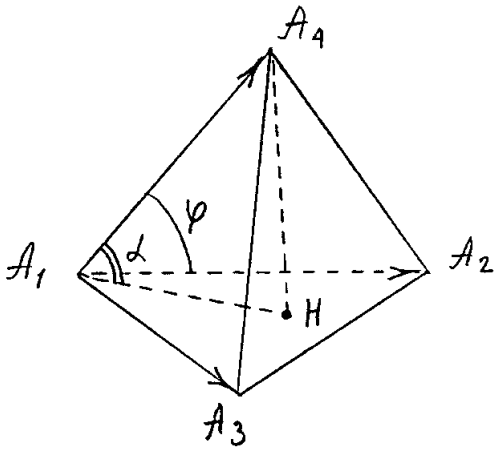
д) объём пирамиды;

е) уравнение прямой A_1A_2;

ж) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

з) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Эскиз к задаче:



Сделаем предварительные вычисления:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\left(-2-(-1)\,;\,-2-(-2)\,;\,5-1\right)=\left(-1;0;4\right) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+0^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=\left(-3-(-1)\,;\,-1-(-2)\,;\,1-1\right)=\left(-2;1;0\right) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4}=\left(-1-(-1)\,;\,0-(-2)\,;\,3-1\right)=\left(0;2;2\right) \qquad \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

а)

Длина ребра A_1A_2 - длина вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$A_1A_2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{17}$$

б)

Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4 (обозначим его φ) - угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{-1\cdot0+0\cdot2+4\cdot2}{\sqrt{17}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{34}}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{34}}\right)\approx0{,}815\ (рад)\approx46^\circ41'$$

ж)

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ - уравнение плоскости, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-(-2) & z-1 \\ -2-(-1) & -2-(-2) & 5-1 \\ -3-(-1) & -1-(-2) & 1-1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)\cdot(0-4)-(y+2)\cdot(0+8)+(z-1)\cdot(-1-0)=0$$

$$-4x-8y-z-19=0$$

$4x+8y+z+19=0$ - общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Из этого уравнения выпишем координаты нормального вектора данной плоскости:

$$\vec{n}=(4;8;1)$$

в)

Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ (обозначим его α) определим как

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{A_1A_4}}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{4\cdot0+8\cdot2+1\cdot2}{\sqrt{4^2+8^2+1^2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\ (рад)=45^\circ$$

г)

Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдём с помощью векторного произведения векторов

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-1;0;4),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;1;0).$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(0-4)-\vec{j}\cdot(0+8)+\vec{k}\cdot(-1-0)=-4\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-1)^2}=\frac{9}{2}=4,5\ \text{(кв. ед.)}$$

д)

Объём пирамиды найдём с помощью смешанного произведения векторов

$$\overrightarrow{A_1A_2}=(-1;0;4),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;1;0),$$
$$\overrightarrow{A_1A_4}=(0;2;2).$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right|$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(2-0)+4\cdot(-4-0)=-18$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot18=3\ \text{(куб. ед.)}$$

е)

Уравнение прямой A_1A_2 - уравнение прямой, проходящей через точку $A_1(-1;-2;1)$ и имеющей направляющий вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(-1;0;4)$:

$$\frac{x-x_1}{s_x}=\frac{y-y_1}{s_y}=\frac{z-z_1}{s_z}$$

$$\frac{x-(-1)}{-1}=\frac{y-(-2)}{0}=\frac{z-1}{4}$$

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{4}$$ - каноническое уравнение прямой A_1A_2.

Деление на ноль в записи условно, и означает, что прямая A_1A_2 находится в плоскости $y=-2$, параллельной плоскости xOz.

з)

Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ - уравнение прямой, проходящей через точку $A_4(-1;0;3)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{n}=(4;8;1)$, найденный в пункте "ж":

$$\frac{x-x_4}{n_x}=\frac{y-y_4}{n_y}=\frac{z-z_4}{n_z}$$

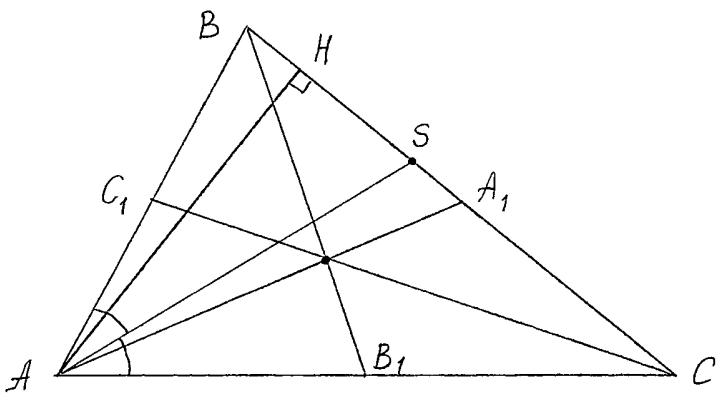
$$\frac{x-(-1)}{4}=\frac{y-0}{8}=\frac{z-3}{1}$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y}{8}=\frac{z-3}{1}$$ - каноническое уравнение высоты A_4H.

5) Даны вершины треугольника $A(6;5;-5)$, $B(9;6;-2)$, $C(8;7;2)$.

Найти:

а) уравнения всех его медиан;
б) координаты точки пересечения медиан;
в) уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A;
г) уравнение высоты, проведённой из вершины A.



AA_1, BB_1, CC_1 - медианы;
M - точка пересечения медиан;
AS - биссектриса;
AH - высота.

а)

Точки A_1, B_1, C_1 - середины сторон BC, AC, AB соответственно, поэтому

$$\begin{cases} x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{9+8}{2} = 8,5 \\ y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{6+7}{2} = 6,5 \\ z_{A_1} = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{-2+2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B_1} = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{6+8}{2} = 7 \\ y_{B_1} = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6 \\ z_{B_1} = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-5+2}{2} = -1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{C_1} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{6+9}{2} = 7,5 \\ y_{C_1} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+6}{2} = 5,5 \\ z_{C_1} = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{-5-2}{2} = -3,5 \end{cases}$$

Уравнения медиан AA_1, BB_1, CC_1 - уравнения одноимённых прямых, т.е. прямых, проходящих через точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 соответственно.

Уравнение прямой AA_1:

$$\frac{x - x_A}{x_{A_1} - x_A} = \frac{y - y_A}{y_{A_1} - y_A} = \frac{z - z_A}{z_{A_1} - z_A}$$

$$\frac{x-6}{8,5-6} = \frac{y-5}{6,5-5} = \frac{z-(-5)}{0-(-5)}$$

$$\frac{x-6}{2,5} = \frac{y-5}{1,5} = \frac{z+5}{5}$$

$\dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+5}{10}$ - уравнение медианы AA_1.

Уравнение прямой BB_1:

$$\frac{x - x_B}{x_{B_1} - x_B} = \frac{y - y_B}{y_{B_1} - y_B} = \frac{z - z_B}{z_{B_1} - z_B}$$

$$\frac{x-9}{7-9} = \frac{y-6}{6-6} = \frac{z-(-2)}{-1,5-(-2)}$$

$$\frac{x-9}{-2} = \frac{y-6}{0} = \frac{z+2}{0,5}$$

$\dfrac{x-9}{-4} = \dfrac{y-6}{0} = \dfrac{z+2}{1}$ - уравнение медианы BB_1 (прямая находится в плоскости $y = 6$).

Уравнение прямой CC_1:

$$\frac{x-x_C}{x_{C_1}-x_C}=\frac{y-y_C}{y_{C_1}-y_C}=\frac{z-z_C}{z_{C_1}-z_C}$$

$$\frac{x-8}{7,5-8}=\frac{y-7}{5,5-7}=\frac{z-2}{-3,5-2}$$

$$\frac{x-8}{-0,5}=\frac{y-7}{-1,5}=\frac{z-2}{-5,5}$$

$$\frac{x-8}{1}=\frac{y-7}{3}=\frac{z-2}{11}$$ - уравнение медианы CC_1.

б)

Точку пересечения медиан M найдём как результат пересечения любых двух медиан, например, AA_1 и BB_1.

$$\begin{cases}\frac{x-6}{5}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+5}{10}\\ \frac{x-9}{-4}=\frac{y-6}{0}=\frac{z+2}{1}\end{cases}$$

Из 2-го уравнения системы имеем $y=6$.

Тогда из 1-го уравнения системы получаем $x=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$ и $z=-\frac{5}{3}=-1\frac{2}{3}$.

Итак, $M\left(7\frac{2}{3};6;-1\frac{2}{3}\right)$.

в)

Уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A.

Поскольку биссектриса разделяет сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то

$$\frac{BS}{SC}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{(6-9)^2+(5-6)^2+(-5-(-2))^2}}{\sqrt{(6-8)^2+(5-7)^2+(-5-2)^2}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{57}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Переходя к координатам, получаем систему уравнений:

$$\frac{x_B-x_S}{x_S-x_C}=\frac{y_B-y_S}{y_S-y_C}=\frac{z_B-z_S}{z_S-z_C}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases}\frac{9-x_S}{x_S-8}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{6-y_S}{y_S-7}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-2-z_S}{z_S-2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_S=\frac{19}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y_S=\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\\ z_S=2\sqrt{3}-4\end{cases}$$

Уравнение прямой AS (биссектрисы) - уравнение прямой, проходящей через точки A и S:

$$\frac{x-x_A}{x_S-x_A}=\frac{y-y_A}{y_S-y_A}=\frac{z-z_A}{z_S-z_A}$$

$$\frac{x-6}{\frac{19}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-6}=\frac{y-5}{\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-5}=\frac{z-(-5)}{2\sqrt{3}-4-(-5)}$$

$$\frac{x-6}{19-\sqrt{3}-12}=\frac{y-5}{11+\sqrt{3}-10}=\frac{z+5}{4\sqrt{3}-8+10}$$

$$\frac{x-6}{7-\sqrt{3}}=\frac{y-5}{1+\sqrt{3}}=\frac{z+5}{2+4\sqrt{3}}$$ - уравнение биссектрисы AM в каноническом виде.

г)

Уравнение высоты, проведённой из вершины A - уравнение прямой, перпендикулярной прямой BC.

$$\overrightarrow{BC}=\left(8-9\ ;\ 7-6\ ;\ 2-(-2)\right)=\left(-1;1;4\right)$$

$$\overrightarrow{AH}=\left(x_H-6\ ;\ y_H-5\ ;\ z_H-(-5)\right)=\left(x_H-6\ ;\ y_H-5\ ;\ z_H+5\right)$$

Поскольку $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AH}$, то их скалярное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=-1\cdot\left(x_H-6\right)+1\cdot\left(y_H-5\right)+4\cdot\left(z_H+5\right)=-x_H+y_H+4z_H+21=0$$

Пусть точка H - произвольная точка прямой AH, не совпадающая с точкой A. Если положить $y_H=0$, $z_H=0$, то $x_H=21$; и теперь можно записать уравнение прямой AH как уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(6;5;-5\right)$ и имеющей направляющий вектор

$$\overrightarrow{AH}=\left(21-6\ ;\ 0-5\ ;\ 0+5\right)=\left(15;-5;5\right):$$

$$\frac{x-6}{15}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-(-5)}{5}$$

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+5}{1}$$ - уравнение высоты AH в каноническом виде.