Установить, какая линия задана уравнением

$$7x^2+9y^2-4xy=1.$$

1-й способ рассуждения.

$$7x^2+9y^2-4xy-1=0 \qquad (*)$$

- линия 2-го порядка, определяемая уравнением $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$.

Рассмотрим квадратичную форму $7x^2+9y^2-4xy$ и её матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Определим собственные числа матрицы и соответствующие им нормированные собственные векторы.

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0$$

откуда $\lambda=8\pm\sqrt{5}$ - собственные числа матрицы.

► При $\lambda_1=8-\sqrt{5}$:

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1+\sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\left\{ \left(-1+\sqrt{5}\right)x_1-2x_2=0 \right.$$

Решение запишем в виде

$$X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2}x_1 \end{pmatrix}=x_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\left(-1+\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix}.$$

Приняв свободную переменную $x_1=2c_1\in R$ запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_1=c_1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}=V_1,$$

где V_1 - семейство собственных векторов матрицы A, соответствующее собственному значению $\lambda=8-\sqrt{5}$.

Нормированный собственный вектор

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}$$

► При $\lambda_2=8+\sqrt{5}$:

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & -2 \\ -2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

что соответствует системе

$$\left\{ \left(1+\sqrt{5}\right)x_1+2x_2=0 \right.$$

Решение запишем в виде

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dfrac{\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2} x_1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\left(-1-\sqrt{5}\right)}{2} \end{pmatrix}.$$

Приняв свободную переменную $x_1 = -2c_2 \in R$ запишем общее решение однородной системы уравнений в виде

$$X_2 = c_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} = V_2,$$

где V_2 - семейство собственных векторов матрицы A, соответствующее собственному значению $\lambda = 8+\sqrt{5}$.
Нормированный собственный вектор

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}$$

► Перейдём к базису векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Составим матрицу перехода

$$H = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} & -\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix}$$

Координаты произвольного вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в новом базисе определяются из системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} & -\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} & \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \tilde{x} - \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \tilde{y} \\ y = \sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \tilde{x} + \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}} \cdot \tilde{y} \end{cases}$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ - новые координаты вектора в базисе $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

В этом базисе квадратичная форма $7x^2 + 9y^2 - 4xy$ будет иметь вид

$$\lambda_1 (\tilde{x})^2 + \lambda_2 (\tilde{y})^2 = \left(8-\sqrt{5}\right)(\tilde{x})^2 + \left(8+\sqrt{5}\right)(\tilde{y})^2.$$

Подставив полученное выражение в уравнение (*), получим:

$$\left(8-\sqrt{5}\right)(\tilde{x})^2 + \left(8+\sqrt{5}\right)(\tilde{y})^2 - 1 = 0$$

$$\frac{(\tilde{x})^2}{\left(\dfrac{8+\sqrt{5}}{59}\right)} + \frac{(\tilde{y})^2}{\left(\dfrac{8-\sqrt{5}}{59}\right)} = 1$$

- каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = \sqrt{\dfrac{8+\sqrt{5}}{59}}$, $b = \sqrt{\dfrac{8-\sqrt{5}}{59}}$ и центром $(0;0)$ в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, определяемой ортонормированным базисом векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

► Возможный порядок построения эллипса.

а) Зададим произвольно систему координат xOy и построим в ней нормированные собственные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

б) Проведём координатные оси $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$ через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

в) В системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ отметим центр симметрии эллипса и проведём через него оси симметрии параллельно осям $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$.

г) В системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ построим эллипс с центром $(0;0)$ и полуосями $a=\sqrt{\dfrac{8+\sqrt{5}}{59}}$ и $b=\sqrt{\dfrac{8-\sqrt{5}}{59}}$.

Литература:

1) Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. "Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчёты", 2008, стр. 97 (пример 5.7);

2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2006, стр. 89.

2-й способ рассуждения.

$$7x^2+9y^2-4xy-1=0$$

- линия 2-го порядка, определяемая уравнением $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$.

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 63-4=59\neq 0,$$

то линия центральная.

Находим центр симметрии. Его координаты должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0 \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_0-2y_0=0 \\ -2x_0+9y_0=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases},$$

Повернём систему координат xOy на угол φ:

$$\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{7-9}{2\cdot(-2)}=\frac{1}{2}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin 2\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\varphi=\frac{\operatorname{ctg}2\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\varphi}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}$$

В результате поворота получаем каноническую систему координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, в которой уравнение линии имеет вид:

$$\tilde{a}_{11}\tilde{x}^2 + \tilde{a}_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{a}_{33} = 0,$$

где

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\cdot\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cdot\sin^2\varphi =$$

$$= 7\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right) + 2\cdot(-2)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}} + 9\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 8-\sqrt{5}$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\cdot\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cdot\cos^2\varphi =$$

$$= 7\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right) - 2\cdot(-2)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}} + 9\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 8+\sqrt{5}$$

$$\tilde{a}_{33} = -1$$

Следовательно

$$\left(8-\sqrt{5}\right)\cdot\tilde{x}^2 + \left(8+\sqrt{5}\right)\cdot\tilde{y}^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{1}{8-\sqrt{5}}\right)} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{8+\sqrt{5}}\right)} = 1$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{8+\sqrt{5}}{59}\right)} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{8-\sqrt{5}}{59}\right)} = 1$$

- каноническое уравнение эллипса.

Базисными векторами канонической системы координат являются векторы

$$\vec{e}_1 = (\cos\varphi\ ;\ \sin\varphi)$$

$$\vec{e}_2 = (-\sin\varphi\ ;\ \cos\varphi)$$

или

$$\vec{e}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}\ ;\ \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$\vec{e}_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}\ ;\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}}\right)$$

Оси симметрии эллипса:

$$\left[\begin{array}{l} y = \operatorname{tg}\varphi\cdot x \\ y = -\operatorname{ctg}\varphi\cdot x \end{array}\right.$$

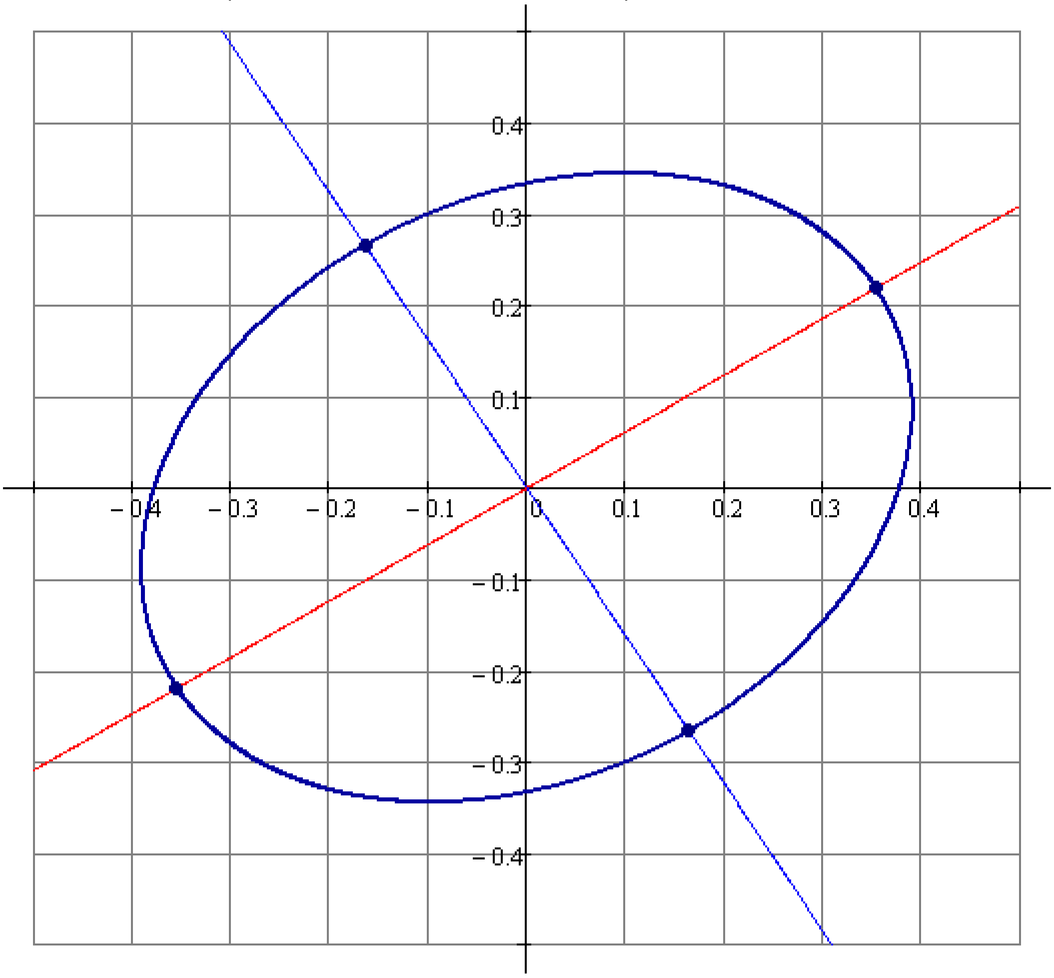
$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}}}\cdot x \\ y=-\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{10}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{10}}}\cdot x \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\cdot x \\ y=-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\cdot x \end{array}\right.$$

Построение графика в Mathcad 14:

$$y_1(x) := \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\cdot x \qquad y_u(x) := \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{59}{9}x^2}$$

$$y_2(x) := -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\cdot x \qquad y_d(x) := \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{59}{9}x^2}$$



Литература:

1) Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. "Геометрия", 2003, стр. 178 (задача 4).