

Метод площадей

1. Медиана как ГМТ.
2. На сторонах AB и AC треугольника ABC , площадь которого равна 36, взяты соответственно точки M и K так, что $AM/MB = 1/3$, а $AK/KC = 2/1$. Найдите площадь треугольника AMK .
3. Лемма об отношении площадей.
4. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно, причём отрезки AP , BQ , CR пересекаются в точке M . Известно, что $AR : RB = 4 : 5$, $CM : MR = 3 : 7$. Найдите $CQ : QA$ и $CP : PB$.
5. **Теорема Чевы.** На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что отрезки AP , BQ , CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$.
6. **Обобщённая теорема Чевы.** На прямых BC , CA , AB , содержащих стороны $\triangle ABC$, даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что прямые AP , BQ , CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.
7. Выведите из теоремы Чевы, что...
а) ... медианы... б) ... биссектрисы... в) ... высоты...
... треугольника пересекаются в одной точке.
8. **Теорема Ван-Обеля.** Чевяны AP , BQ , CR треугольника ABC пересекаются в точке M . Докажите, что $\frac{CM}{MR} = \frac{CQ}{QA} + \frac{CP}{PB}$.
9. Дан треугольник ABC . На сторонах BC и CA даны точки P и Q такие, что $CP : PB = 5 : 3$, $CQ : QA = 1 : 7$. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке R . Найдите $BR : RA$.
10. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC . На сторонах BC и CA даны точки P и Q , а на продолжении стороны AB дана точка R . Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.
11. **Обобщённая теорема Менелая.** На прямых BC , CA , AB , содержащих стороны треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$.
12. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой.

Метод площадей

1. Медиана как ГМТ.
2. На сторонах AB и AC треугольника ABC , площадь которого равна 36, взяты соответственно точки M и K так, что $AM/MB = 1/3$, а $AK/KC = 2/1$. Найдите площадь треугольника AMK .
3. Лемма об отношении площадей.
4. На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно, причём отрезки AP , BQ , CR пересекаются в точке M . Известно, что $AR : RB = 4 : 5$, $CM : MR = 3 : 7$. Найдите $CQ : QA$ и $CP : PB$.
5. **Теорема Чевы.** На сторонах BC , CA , AB треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что отрезки AP , BQ , CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$.
6. **Обобщённая теорема Чевы.** На прямых BC , CA , AB , содержащих стороны $\triangle ABC$, даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что прямые AP , BQ , CR пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.
7. Выведите из теоремы Чевы, что...
а) ... медианы... б) ... биссектрисы... в) ... высоты...
... треугольника пересекаются в одной точке.
8. **Теорема Ван-Обеля.** Чевяны AP , BQ , CR треугольника ABC пересекаются в точке M . Докажите, что $\frac{CM}{MR} = \frac{CQ}{QA} + \frac{CP}{PB}$.
9. Дан треугольник ABC . На сторонах BC и CA даны точки P и Q такие, что $CP : PB = 5 : 3$, $CQ : QA = 1 : 7$. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке R . Найдите $BR : RA$.
10. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC . На сторонах BC и CA даны точки P и Q , а на продолжении стороны AB дана точка R . Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1$.
11. **Обобщённая теорема Менелая.** На прямых BC , CA , AB , содержащих стороны треугольника ABC даны точки P , Q , R соответственно. Докажите, что точки P , Q , R лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1$.
12. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой.