

Задачи с параметрами МГУ

Лучи и прямые

1. Найдите все a , при которых для любого b уравнение $|x - 2| + b|2x + 1| = a$ имеет хотя бы один корень.

Ответ: $a = 5/2$

2. Найдите все a , при которых найдётся b , такое что система

$$2y - x \leq 1, \quad 2x + y \leq 2, \quad y + 1 + ax \geq 0, \quad x^2 + y^2 \geq b$$

не имеет решений.

Ответ: $-1/2 < a < 2$

Параболы

3. Найдите все a , при которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$ содержится в интервале $(-3; 2)$.

Ответ: $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2$

4. Найдите все a , при которых неравенство $x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

Ответ: $a = -4; -5/2 \leq a \leq -9/4$

5. Найдите все a , при которых корни уравнений $x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0$ и $x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$ перемежаются (т.е. каждое из уравнений имеет два корня и между ними лежит корень другого уравнения).

Ответ: $-3 \leq a < 0$

6. Найдите все a , при которых уравнение $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет единственный корень.

Ответ: $a < (\sqrt{5} - 1)/2; a > 1$

Гиперболы

7. Найдите все a , при которых графики функций $y = \frac{3x + 1}{x}, y = \frac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на 5 частей.

Ответ: $0 \leq a \leq 1$

Окружности

8. Найдите все пары (a, b) , при которых система

$$x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \quad x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27$$

имеет два различных решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , удовлетворяющих равенству $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

Ответ: $a = 4, b \in (-\sqrt{45} - 3; -\sqrt{45} + 3) \cup (\sqrt{45} - 3; \sqrt{45} + 3)$

9. Найдите все a , при которых уравнение $a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$ имеет единственный корень.

Ответ: $2 \leq a < 3; 3 < a \leq 4$

10. Докажите, что точки пересечения кривых, заданных уравнениями $y = x^2 - 2x$ и $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = 1$, лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

Ответ: $\sqrt{161}/9$

Разное

11. Найдите все пары a, b , при которых система $\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0, \end{cases}$ имеет не менее 5 различных решений.

Ответ: $a = \pm 1, b = -2; a \in \mathbb{R}, b = 2$

12. Найдите все a , при которых уравнение $5 \cos x + \sin x + \cos(x - \varphi) = a$ имеет корень
(а) хотя бы при одном φ ; (б) при любом φ .

Ответ: (а) $-1 - \sqrt{26} \leq a \leq 1 + \sqrt{26}$ (б) $1 - \sqrt{26} \leq a \leq -1 + \sqrt{26}$

13. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x) = (a - 1)x^2 - (2a + 1)x + (5a + 2)$. Найдите
(а) все a , при которых $x_1, x_2 > 1$;
(б) все b , при которых выражение $(x_1 - b)(x_2 - b)$ принимает постоянное значение для всех a , для которых оно определено.

Ответ: (а) $1 < a \leq (2 + \sqrt{13})/4$; (б) $b = 7/3$

14. Найдите все натуральные a , при которых выражение $\frac{1}{x + y + 3}$ имеет смысл для всех пар чисел $x, y < 0$, для которых имеет смысл выражение $\lg(xy - a)$.

Ответ: $a \geq 3$

Дополнительные задачи

15. Найдите все a , при которых уравнение $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку $[0, 4]$.

Ответ: $4/3 \leq a \leq 2$

16. Найдите все a , при которых система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a = -2$

17. Найдите все a , при каждом из которых для любого b система $\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $-1/2 \leq a \leq 2/3$

18. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет неравенствам $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$. Определите знак коэффициента a .

Ответ: $a < 0$

19. Найдите все a , при которых неравенство $2ax + 2\sqrt{2x + 3} - 2x + 3a - 5 < 0$ выполняется для всех $x \in [-1; 3]$.

Ответ: $a < 1/2$

20. Найдите все a , при которых система $\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2y, \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Ответ: $-8 < a < 0$

21. Найдите все $a > 0$, при которых система $2|x| + |y| = 2, x^2 + y^2 = a^2$ имеет ровно 4 различных решения. При наименьшем таком a найдите площадь фигуры, заданной неравенством

$$\frac{2|x| + |y| - 2}{x^2 + y^2 - a^2} \leq 0.$$

Ответ: $a = 2/\sqrt{5}; 1 < a < 2; S = 4 - 4\pi/5$

22. Найдите все a , при которых неравенство $x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} \leq 7a - 1$ не имеет неотрицательных решений.

Ответ: $-1 \leq a < -1/5$