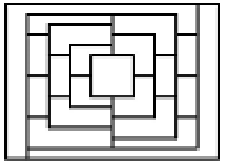
Принцип крайнего в комбинаторной геометрии

<table>
<tr><th></th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th></tr>
<tr><td>Л</td><td>Некоторые точки плоскости окрашены в синий или красный цвет так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой; точек каждого цвета не меньше трёх. Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.</td><td>Все стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\sqrt{3}/4$.</td><td>На плоскости даны несколько (более двух) точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать две из них так, что отрезок, их соединяющий, виден из любой другой отмеченной точки под острым углом.</td><td>В пространстве отмечено несколько точек так, что любая из них является серединой отрезка с концами в двух других отмеченных точках. Докажите, что отмечено бесконечно много точек.</td></tr>
<tr><td>С</td><td>На плоскости расположено несколько точек. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не более 1. Докажите, что все точки лежат внутри некоторого треугольника площади 4.</td><td>На каждой стороне выпуклого четырёхугольника как на диаметре построен круг. Докажите, что объединение этих четырёх кругов покрывает весь четырёхугольник.</td><td>На плоскости даны 30 синих и 30 красных точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 30 непересекающихся отрезков, каждый из которых соединял бы красную точку с синей.</td><td>На плоскости нарисовано несколько одинаковых кругов. Докажите, что найдётся такой, который касается не более трёх других.</td></tr>
<tr><td>Т</td><td colspan="2">На плоскости дана точка и несколько векторов, сумма которых равна 0. Докажите, что можно последовательно отложить эти векторы от данной точки так, чтобы они все оказались внутри угла в 60^o с вершиной в данной точке.</td><td>На плоскости дано конечное множество точек. Докажите, что либо все они лежат на одной прямой, либо есть прямая, проходящая ровно через две из них.</td><td>На шахматной доске стоит несколько ладей. Определите минимальное количество цветов, гарантированно достаточное для раскраски ладей так, чтобы ладьи одного цвета не били друг друга.</td></tr>
</table>

Принцип крайнего в теории графов

	V	VI	VII	VIII
Л	Докажите, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.	Раскрасьте рисунок в три цвета так, чтобы соседние части были покрашены в разные цвета. Можно ли обойтись двумя цветами? 	Докажите, что в графе без циклов есть как минимум две висячие вершины.	Докажите, что если в графе есть цикл, то в нём также есть простой цикл.
С	В 50 множествах содержится в общей сложности 50 элементов. Каждое множество содержит хотя бы 7 элементов. Можно ли утверждать, что найдётся элемент, содержащийся хотя бы в 7 множествах?	17 ученых переписываются по трем дисциплинам. При этом любая пара ученых переписывается ровно по одной дисциплине. Докажите, что можно выбрать троих ученых, которые переписываются по одной дисциплине.	В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Для каждого города известна минимальная длина маршрута из этого города, проходящего по всем городам страны. Докажите, что длины таких маршрутов отличаются не более, чем в полтора раза.	Докажите, что в любом полном сильно связном ориентированном графе есть простой цикл, содержащий все вершины.
Т	В компании из 100 человек среди любых трёх есть двое незнакомых. Какое наибольшее число пар знакомых может быть в этой компании?	Связный граф имеет 2000 вершин, причем степень любой вершины не более 11. Докажите, что можно выбрать 334 вершины так, чтобы любой нечётный цикл проходил *не только* через выбранные вершины.	В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится новостями со всеми знакомыми. Любая новость становится известной всему посёлку. Докажите, что можно выбрать 90 жителей и одновременно сообщить им какую-то новость так, чтобы через 10 дней она стала известной всему поселку.	В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем всего есть 200 дорог. Оказалось, что любой циклический маршрут имеет длину не менее пяти. Докажите, что существуют два непересекающихся циклических маршрута.

Принцип крайнего в арифметике

	IX	X	XI	XII
Л	На полях бесконечной клетчатой доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних. Докажите, что все числа равны между собой.	Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 в ряд так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?	Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.	Какие шесть различных натуральных чисел в сумме дают 22? Найдите все варианты.
С	В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих её клеток.	Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем каждый собрал разное количество. Докажите, что какие-то три грибника собрали вместе не менее 50 грибов.	Существуют ли различные натуральные числа x,y,z,t такие, что $x^x+y^y=z^z+t^t$?	На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились бы на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?
Т	Дана квадратная таблица, в каждой её клетке записано число, причём все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.	Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?	Решите в целых числах уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$.	По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.

Задачи для самостоятельного решения

1. Каждый из 5005 астрономов на 5005 разных планетах (по одному астроному на планете) наблюдает за ближайшей к нему планетой (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Какое наименьшее количество планет может быть без наблюдения с других планет?
2. На плоскости даны 23 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что 10 из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а 10 — вне ее.
3. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из ученых конгресса, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Можно ли утверждать, что найдется ученый, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса?
4. Докажите, что в любом полном ориентированном графе есть простой путь, содержащий все вершины.
5. Можно ли расположить числа 1, 2, …, 16 ...
   - **a.** … в ряд …
   - **b.** … по кругу …

   … так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих была точным квадратом?

Задачи для самостоятельного решения

1. Каждый из 5005 астрономов на 5005 разных планетах (по одному астроному на планете) наблюдает за ближайшей к нему планетой (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Какое наименьшее количество планет может быть без наблюдения с других планет?
2. На плоскости даны 23 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что 10 из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведённой через выбранные точки, а 10 — вне ее.
3. На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из ученых конгресса, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Можно ли утверждать, что найдется ученый, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса?
4. Докажите, что в любом полном ориентированном графе есть простой путь, содержащий все вершины.
5. Можно ли расположить числа 1, 2, …, 16 ...
   - **c.** … в ряд …
   - **d.** … по кругу …

   … так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих была точным квадратом?