Простые числа, делимость и остатки

1. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две непустые группы так, что каждая команда первой группы одержала ровно n побед, а каждая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?
2. Натуральное 59-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. При этом пятёрок на 8 больше, чем троек. Найдите остаток от деления числа A на 9.
3. Докажите, что число $2^{2014} + 1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.
4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Диофантовы уравнения

5. Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2015, такое, что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.
6. При каких натуральных $n > 1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?
7. Если из четырёхзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K – натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.
8. **Суммы квадратов** (решения уравнения $x^2 + y^2 = n$).
   (a) Докажите, что если простое $q \equiv_4 -1$ делит $a^2 + b^2$, то $a \vdots q$, $b \vdots q$.
   (b) Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых представимо в виде суммы двух квадратов, тоже представимо в виде суммы двух квадратов.
   (c) Известно, что число $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) является суммой двух точных квадратов. Докажите, что n также является суммой двух точных квадратов.
   (d) **Теорема Ферма-Эйлера.** Простое число $p \equiv_4 1$ можно представить в виде $p = a^2 + b^2$, где a и b — целые числа.
   (e) Докажите, что целое число можно представить в виде суммы 2 полных квадратов, если и только если все нечетные простые числа вида $4k - 1$ входят в его разложение с четными степенями.

Простые числа, делимость и остатки

1. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две непустые группы так, что каждая команда первой группы одержала ровно n побед, а каждая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?
2. Натуральное 59-значное число A записывается только цифрами 3, 4 и 5. При этом пятёрок на 8 больше, чем троек. Найдите остаток от деления числа A на 9.
3. Докажите, что число $2^{2014}+1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.
4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечётных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

Диофантовы уравнения

5. Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2015, такое, что при умножении на 5 сумма его цифр (в десятичной записи) не меняется.
6. При каких натуральных $n > 1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?
7. Если из четырёхзначного числа X вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число $N = K^2$, причем K – натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число N.
8. **Суммы квадратов** (решения уравнения $x^2 + y^2 = n$).
   (a) Докажите, что если простое $q \equiv_4 -1$ делит $a^2 + b^2$, то $a \vdots q$, $b \vdots q$.
   (b) Докажите, что произведение двух чисел, каждое из которых представимо в виде суммы двух квадратов, тоже представимо в виде суммы двух квадратов.
   (c) Известно, что число $2n$ ($n \in \mathbb{N}$) является суммой двух точных квадратов. Докажите, что n также является суммой двух точных квадратов.
   (d) **Теорема Ферма-Эйлера.** Простое число $p \equiv_4 1$ можно представить в виде $p = a^2 + b^2$, где a и b — целые числа.
   (e) Докажите, что целое число можно представить в виде суммы 2 полных квадратов, если и только если все нечетные простые числа вида $4k - 1$ входят в его разложение с четными степенями.