Теорема Ван дер Вардена

Теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии.

Пусть натуральный ряд раскрашен в несколько (конечное число) цветов. Тогда в нем можно найти сколь угодно длинную конечную одноцветную арифметическую прогрессию.

1. Все клетки бесконечного листа клетчатой бумаги раскрасили в N цветов. Докажите, что найдутся
   (a) прямоугольник, вершины которого одного цвета (а стороны параллельны линиям сетки) — для произвольного N;
   (b) l горизонтальных и m вертикальных линий, которые пересекаются по lm клеткам одного цвета (l, m — любые) — для произвольного N;
   (c) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого одного цвета, — для $N = 2$ и для $N = 3$.
2. Приведите пример разбиения натурального ряда на два подмножества, ни одно из которых не содержит:
   (a) бесконечной арифметической прогрессии;
   (b) бесконечной геометрической прогрессии;
   (c) ни бесконечной геометрическтой прогрессии, ни бесконечной арифметической прогрессии.
3. Приведите пример раскраски клеток плоскости в два цвета, при которой не найдется бесконечного множества вертикальных и бесконечного множества горизонтальных линий, в пересечении которых находятся одноцветные клетки.
4. Выведите "геометрическую" теорему Ван дер Вардена из "арифметической".

Теорема Ван дер Вардена на плоскости.

Пусть каждая клетка бесконечного листа клетчатой бумаги окрашена в один из N цветов. Тогда для любого набора клеток $a_1, a_2, \ldots, a_l$ найдется набор одинаково окрашенных клеток $b_1, b_2, \ldots, b_l$, подобный (посредством гомотетии или параллельного переноса) данному.

Более того, такой набор клеток можно найти в любом квадрате $m \times m$, где m — достаточно большое число, зависящее только от количества цветов N и заданного набора $a_1, a_2, \ldots, a_l$.

5. Докажите, что из теоремы Ван дер Вардена на плоскости следует теорема Ван дер Вардена об арифметической прогрессии.

Доказательство теоремы Ван дер Вардена на плоскости

Определение.

Серией назовем любой набор клеток, получаемый из исходного a_1, a_2, …, a_l параллельным переносом или гомотетией, т.е. любой набор клеток b_1, b_2, …, b_l со свойством: $\overrightarrow{B_iB_j} = d\,\overrightarrow{A_iA_j}$ при всех $i, j = 1, \dots l$, где A_1, …, A_l, B_1, …, B_l — центры клеток $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_l$ соответственно, а d — некоторое натуральное число.

6. Предположим, что теорема доказана для l клеток и для любого количества цветов. Докажите, что утверждение останется верным, если вместо клеток рассматривать произвольные конечные (по количеству клеток) одинаковые (получаемые друг из друга параллельным переносом) фигуры, причем они могут быть разнесены на сколь угодно большое наперед заданное расстояние. (Одинаковые фигуры образуют серию, если серию образуют самые левые среди самых нижних клеток каждой из этих фигур, а считаются покрашенными одинаково (и называются *однотипными*), если при совмещении (параллельным переносом) клетки совмещаются с клетками того же цвета.)

7. **База индукции.** Найдите m для $l = 2$ и произвольного N.

Для удобства будем рассматривать не произвольные наборы клеток, а "недостроенные прямоугольники" (т.е. прямоугольники, у которых недостроен правый конец верхней строки).

Назовем самую правую среди самых верхних клеток серии *последней*. Везде, где будет идти речь о серии из l клеток, будет подразумеваться, что последнюю клетку мы не учитываем.

8. **Шаг индукции.** Предположим, что теорема доказана для $\leq l$ клеток и любого количества цветов. Докажите, что утверждение верно для $l + 1$ клетки в исходном наборе.

   (a) **Для $N = 2$.** (*Подсказка:* рассмотрите однотипные достаточно большие квадраты $K(1)$, $K(2)$, …, $K(l)$, образующие серию; в каждом из них выберите одинаково расположенные серии из l одноцветных клеток; рассмотрите последние клетки каждой из этих серий.)

   (b) **Для произвольного N.** Докажите, что достаточно рассмотреть квадрат со стороной q_N, где последовательность q_r определена следующим образом:

$$q_0 = 1, \quad q_{r+1} = (m(N^{q_r^2}, l) + 1) \cdot q_r.$$

Литература

- *"Три жемчужины теории чисел"*, Хинчин А.Я., Издательство «НАУКА», 1979г.
- *"Раскраска плоскcти и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях"*, Беспамятных С.Н., Журнал «Квант», 1983г., 6 номер.
- *"Обобщённая теорема Ван дер Вардена"*, Бугаенко В.О., Летняя школа «Современная математика» в Дубне, 2005г.

Биография

Бартель Леендерт ван дер Варден (нидерл. Bartel Leendert van der Waerden, 2 февраля 1903, Амстердам, Нидерланды – 12 января 1996, Цюрих, Швейцария) — голландский математик.

Обучался в Амстердамском университете, затем в Гёттингенском университете, где на него огромное влияние оказала Эмми Нётер.

Основные работы в области алгебры, алгебраической геометрии, где он (наряду с Андре Вейлем и Оскаром Зарисским) поднял уровень строгости, и математической физики, где он занимался приложением теории групп к вопросам квантовой механики (наряду с Германом Вейлем и Юджином Вигнером). Его классическая книга «Современная алгебра» (1930) стала образцом для последующих учебников по общей алгебре и выдержала множество переизданий.

Ван дер Варден — один из крупнейших специалистов по истории математики и астрономии в Древнем мире. Его «Пробуждающаяся наука» (Ontwakende wetenschap 1950, рус. пер. 1959) даёт развёрнутое изложение истории математики и астрономии в Древнем Египте, Вавилоне и Греции. В Приложении к русскому переводу этой книги опубликована статья «Пифагорейское учение о гармонии» (1943) — фундаментальное изложение пифагорейских взглядов на музыкальную гармонию.

Задачи

9. Докажите, что при любом n и при любом разбиении натурального ряда на N классов хотя бы один из них содержит n арифметических прогрессий длины n, первые члены которых образуют геометрическую прогрессию.

10. Докажите, что при любой раскраске клеток в k цветов найдется бесконечное множество вертикальных прямых $\{x_i\}$ и бесконечное множество горизонтальных прямых $\{y_j\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ такие, что в пересечении прямых y_i и x_j, где $i \geq j$, получаются центры одноцветных клеток.

11. Дано натуральное число $n > 1$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

12. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, все четыре клетки на пересечении которых окрашены в разные цвета.

13. На бесконечном (изначально белом) листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: по очереди закрашивают произвольные неокрашенные клетки в красный (первый игрок) и синий (второй игрок) цвета. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырёх красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать. Может ли выиграть первый игрок? Каков будет ответ на этот вопрос, если второй игрок закрашивает синим цветом сразу по две клетки? А если по 100 клеток?