

Квадратичные уравнения на плоскости

1. Докажите **формулу Стюарта**: если в треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка M , причем $AM = p$, $BM = q$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $CM = x$, то

$$x^2 = \frac{q}{c} \cdot a^2 + \frac{p}{c} \cdot b^2 - p \cdot q.$$

2. Для фиксированных точек A, B и фиксированных чисел α, β рассматривается выражение $f(X) = \alpha AX^2 + \beta BX^2$. Докажите, что если $\alpha + \beta \neq 0$, то найдутся точка C , число γ и константа c , такие что $f(X) = \gamma CX^2 + c$ для любой точки X .
3. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $k_1, k_2, \dots, k_n, d$ — произвольные действительные числа. Докажите, что ГМТ X :

$$k_1 C_1 X^2 + k_2 C_2 X^2 + \dots = d$$

- если $\sum k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо $\emptyset$;
- если $\sum k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

Приведите примеры, показывающие, что все случаи в задаче 3 возможны.

4. Даны квадратичные уравнения $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$, задающие прямые ℓ_1 и ℓ_2 , пересекающиеся в точке O . Докажите, что любая прямая, проходящая через точку O , задается уравнением вида $k_1 f_1(X) + k_2 f_2(X) = 0$ при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2 \omega_5}$ и $\ell_{\omega_4 \omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3 .
6. **Окружность Аполлония.** Докажите, что ГМТ X : $AX:BX = k$ — окружность ($k \neq 1$) либо прямая ($k = 1$).
7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по его биссектрисе и отрезкам, на которые она делит сторону треугольника.
8. Точки M, N таковы, что $AM:BM:CM = AN:BN:CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .
9. Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.

Квадратичные уравнения на плоскости

1. Докажите **формулу Стюарта**: если в треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка M , причем $AM = p$, $BM = q$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $CM = x$, то

$$x^2 = \frac{q}{c} \cdot a^2 + \frac{p}{c} \cdot b^2 - p \cdot q.$$

2. Для фиксированных точек A, B и фиксированных чисел α, β рассматривается выражение $f(X) = \alpha AX^2 + \beta BX^2$. Докажите, что если $\alpha + \beta \neq 0$, то найдутся точка C , число γ и константа c , такие что $f(X) = \gamma CX^2 + c$ для любой точки X .

3. Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $k_1, k_2, \dots, k_n, d$ — произвольные действительные числа. Докажите, что ГМТ X :

$$k_1 C_1 X^2 + k_2 C_2 X^2 + \dots = d$$

- если $\sum k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо $\emptyset$;
- если $\sum k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

Приведите примеры, показывающие, что все случаи в задаче 3 возможны.

4. Даны квадратичные уравнения $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$, задающие прямые ℓ_1 и ℓ_2 , пересекающиеся в точке O . Докажите, что любая прямая, проходящая через точку O , задается уравнением вида $k_1 f_1(X) + k_2 f_2(X) = 0$ при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2 \omega_5}$ и $\ell_{\omega_4 \omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3 .
6. **Окружность Аполлония.** Докажите, что ГМТ X : $AX:BX = k$ — окружность ($k \neq 1$) либо прямая ($k = 1$).
7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по его биссектрисе и отрезкам, на которые она делит сторону треугольника.
8. Точки M, N таковы, что $AM:BM:CM = AN:BN:CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .
9. Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.