Целозначные многочлены

1. Дано натуральное число m. Приведите пример многочлена, старший коэффициент которого равен $1/m$ и который принимает целые значения при всех целых значениях аргумента.

! *Целозначный многочлен* — многочлен, обладающий свойством $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.

2. Рассмотрим многочлен $C_x^k = \dfrac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$, где $k \in \mathbb{N}_0$. Докажите, что он целозначный.

3. Найдите для $P(x) = C_x^k$ все такие многочлены $Q(x)$, что
$$P(x) = Q(x+1) - Q(x)\ .$$

4. Докажите, что любой многочлен $P(x) \not\equiv 0$ единственным образом представляется в виде
$$P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + ... + a_1 C_x^1 + a_0$$
с $a_n \neq 0$.

5. **Дискретная первообразная.** Для многочлена $P(x)$ найдите все такие многочлены $Q(x)$, что
$$P(x) = Q(x+1) - Q(x)\ .$$

6. Докажите, что в представлении
$$P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + ... + a_1 C_x^1 + a_0$$
все $a_i \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда f целозначный.

7. Пусть $f(x, y)$ — многочлен от двух переменных. Известно, что при любых натуральных b и c число $f(b, c)$ натурально и является общим делителем b и c. Докажите, что $f(x, y) \equiv 1$.

8. Про многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ известно, что если x целое, то $P(x)$ — куб целого числа. Доказать, что $P(x) \equiv (x+d)^3$ при некотором d.

Целозначные многочлены

1. Дано натуральное число m. Приведите пример многочлена, старший коэффициент которого равен $1/m$ и который принимает целые значения при всех целых значениях аргумента.

! *Целозначный многочлен* — многочлен, обладающий свойством $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.

2. Рассмотрим многочлен $C_x^k = \dfrac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$, где $k \in \mathbb{N}_0$. Докажите, что он целозначный.

3. Найдите для $P(x) = C_x^k$ все такие многочлены $Q(x)$, что
$$P(x) = Q(x+1) - Q(x)\ .$$

4. Докажите, что любой многочлен $P(x) \not\equiv 0$ единственным образом представляется в виде
$$P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + ... + a_1 C_x^1 + a_0$$
с $a_n \neq 0$.

5. **Дискретная первообразная.** Для многочлена $P(x)$ найдите все такие многочлены $Q(x)$, что
$$P(x) = Q(x+1) - Q(x)\ .$$

6. Докажите, что в представлении
$$P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + ... + a_1 C_x^1 + a_0$$
все $a_i \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда f целозначный.

7. Пусть $f(x, y)$ — многочлен от двух переменных. Известно, что при любых натуральных b и c число $f(b, c)$ натурально и является общим делителем b и c. Докажите, что $f(x, y) \equiv 1$.

8. Про многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ известно, что если x целое, то $P(x)$ — куб целого числа. Доказать, что $P(x) \equiv (x+d)^3$ при некотором d.