

Теоремы Мирского и Дилуорса

Определение. Отношение $\rightarrow$ на множестве $\mathcal{S}$ называется

- *рефлексивным*, если $\forall b \in \mathcal{S}$ справедливо $b \rightarrow b$;
- *антисимметричным*, если условия $a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a$ одновременно могут выполняться только при $a = c$;
- *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in \mathcal{S}$ из $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow c$ следует $a \rightarrow c$;
- *отношением порядка*, если оно одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; в этом случае пара $(\mathcal{S}, \rightarrow)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ).

Элементы a и c называются *сравнимыми*, если
$$\begin{cases} a \rightarrow c \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

Цепью называется набор попарно сравнимых элементов.

Антицепью называется набор попарно несравнимых элементов.

Максимальным называется элемент $a \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall c \in \mathcal{S}) a \not\rightarrow c$.

Минимальным называется элемент $c \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall a \in \mathcal{S}) a \not\rightarrow c$.

- В некотором ЧУМе есть (анти)цепь из d элементов. Докажите, что в нём есть как минимум $2^d - 1$ (анти)цепей.
- Докажите, что в одной цепи может быть не более одного минимального и не более одного максимального элемента, причём в максимальной (по включению) конечной цепи есть и такой, и такой.
- Докажите, что набор всех максимальных (минимальных) элементов образует антицепь.

Теорема Мирского: наименьшее количество антицепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе.

Теорема Дилуорса: наименьшее количество цепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе.

- Дана последовательность из n различных чисел. Докажите, что
 - если $n > k^2$, то есть монотонная подпоследовательность из $k + 1$ чисел;
 - если $n \leq k^2$, то монотонной последовательности длины $k + 1$ может не быть.
- На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.
- Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

Теоремы Мирского и Дилуорса

Определение. Отношение $\rightarrow$ на множестве $\mathcal{S}$ называется

- *рефлексивным*, если $\forall b \in \mathcal{S}$ справедливо $b \rightarrow b$;
- *антисимметричным*, если условия $a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a$ одновременно могут выполняться только при $a = c$;
- *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in \mathcal{S}$ из $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow c$ следует $a \rightarrow c$;
- *отношением порядка*, если оно одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; в этом случае пара $(\mathcal{S}, \rightarrow)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ).

Элементы a и c называются *сравнимыми*, если
$$\begin{cases} a \rightarrow c \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

Цепью называется набор попарно сравнимых элементов.

Антицепью называется набор попарно несравнимых элементов.

Максимальным называется элемент $a \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall c \in \mathcal{S}) a \not\rightarrow c$.

Минимальным называется элемент $c \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall a \in \mathcal{S}) a \not\rightarrow c$.

- В некотором ЧУМе есть (анти)цепь из d элементов. Докажите, что в нём есть как минимум $2^d - 1$ (анти)цепей.
- Докажите, что в одной цепи может быть не более одного минимального и не более одного максимального элемента, причём в максимальной (по включению) конечной цепи есть и такой, и такой.
- Докажите, что набор всех максимальных (минимальных) элементов образует антицепь.

Теорема Мирского: наименьшее количество антицепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе.

Теорема Дилуорса: наименьшее количество цепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе.

- Дана последовательность из n различных чисел. Докажите, что
 - если $n > k^2$, то есть монотонная подпоследовательность из $k + 1$ чисел;
 - если $n \leq k^2$, то монотонной последовательности длины $k + 1$ может не быть.
- На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.
- Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.