

# Делимость комплексных чисел

! Кольцо  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$  называется *кольцом гауссовых чисел*. Те его элементы, которые нельзя представить в виде произведения двух необратимых, называются *простыми*.

! Число  $z \in \mathbb{Z}[i]$  делится на число  $w \in \mathbb{Z}[i]$ , если существует  $t \in \mathbb{Z}[i]$  такое, что  $z = wt$ . Запись стандартная:  $z:w$  (либо  $w|z$ ).

1. Опишите все пары чисел  $z, w$  такие, что одновременно  $z|w$  и  $w|z$ .

2. Докажите, что если  $|z|^2 \in \mathbb{P}$ , то  $z$  – простой элемент  $\mathbb{Z}[i]$ .

? Какие из чисел  $1 + i, 2, 2 \pm i, 3, 3 \pm i, 3 \pm 2i, 4 \pm i, 4 \pm 3i, 5, 5 \pm i, 5 \pm 2i, 6 \pm i, 5 \pm 4i, 7$  являются простыми в  $\mathbb{Z}[i]$ ?

3. **Деление с остатком.**

Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}[i]$  ( $m \neq 0$ ) найдутся  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$  такие, что

$$n = mq + r \quad \text{и} \quad |r| < |m|.$$

4. Найдите  $(4 + 19i, -6 + 17i)$  в  $\mathbb{Z}[i]$ . Представьте числа  $4 + 19i$  и  $-6 + 17i$  в виде произведения простых. Единственно ли это представление?

5. **Линейное представление НОДа.**

Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}[i]$  найдутся  $s, t \in \mathbb{Z}[i]$  такие, что

$$sn + tm = (n, m).$$

6. **Единственность разложения.**

Докажите, что любой  $w \in \mathbb{Z}[i]$  единственным образом (с точностью до перестановки и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых элементов.

7. Решите в целых числах (т.е. в  $\mathbb{Z}$ ) уравнение

$$x^3 - y^2 = 4.$$

8. Докажите, что простое  $q \equiv_4 3$  является простым и в  $\mathbb{Z}[i]$ .

!! **Теорема Ферма-Эйлера.**

Простое  $p \equiv_4 1$  можно представить в виде суммы двух квадратов.

В связи с этим в  $\mathbb{Z}[i]$  такое  $p$  не является простым.

# Делимость комплексных чисел

! Кольцо  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$  называется *кольцом гауссовых чисел*. Те его элементы, которые нельзя представить в виде произведения двух необратимых, называются *простыми*.

! Число  $z \in \mathbb{Z}[i]$  делится на число  $w \in \mathbb{Z}[i]$ , если существует  $t \in \mathbb{Z}[i]$  такое, что  $z = wt$ . Запись стандартная:  $z:w$  (либо  $w|z$ ).

1. Опишите все пары чисел  $z, w$  такие, что одновременно  $z|w$  и  $w|z$ .

2. Докажите, что если  $|z|^2 \in \mathbb{P}$ , то  $z$  – простой элемент  $\mathbb{Z}[i]$ .

? Какие из чисел  $1 + i, 2, 2 \pm i, 3, 3 \pm i, 3 \pm 2i, 4 \pm i, 4 \pm 3i, 5, 5 \pm i, 5 \pm 2i, 6 \pm i, 5 \pm 4i, 7$  являются простыми в  $\mathbb{Z}[i]$ ?

3. **Деление с остатком.**

Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}[i]$  ( $m \neq 0$ ) найдутся  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$  такие, что

$$n = mq + r \quad \text{и} \quad |r| < |m|.$$

4. Найдите  $(4 + 19i, -6 + 17i)$  в  $\mathbb{Z}[i]$ . Представьте числа  $4 + 19i$  и  $-6 + 17i$  в виде произведения простых. Единственно ли это представление?

5. **Линейное представление НОДа.**

Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbb{Z}[i]$  найдутся  $s, t \in \mathbb{Z}[i]$  такие, что

$$sn + tm = (n, m).$$

6. **Единственность разложения.**

Докажите, что любой  $w \in \mathbb{Z}[i]$  единственным образом (с точностью до перестановки и умножения на обратимые) представляется в виде произведения простых элементов.

7. Решите в целых числах (т.е. в  $\mathbb{Z}$ ) уравнение

$$x^3 - y^2 = 4.$$

8. Докажите, что простое  $q \equiv_4 3$  является простым и в  $\mathbb{Z}[i]$ .

!! **Теорема Ферма-Эйлера.**

Простое  $p \equiv_4 1$  можно представить в виде суммы двух квадратов.

В связи с этим в  $\mathbb{Z}[i]$  такое  $p$  не является простым.