Добавка-2

1. В очереди за пирожками стоят $2n$ ребят. Рублевые монеты у 50% из них. У остальных — только по 50 коп. Цена пирожка 50 коп. Каждый берет 1 пирожок. Изначально у продавца нет денег. Какова вероятность, что все успешно купят пирожок?

2. Докажите, что если коэффициенты многочлена f взаимнопросты в совокупности и коэффициенты многочлена g взаимнопросты в совокупности, то коэффициенты многочлена fg взаимнопросты в совокупности

3. На окружности отмечены $2n$ точек, найдите количество способов соединить их непересекающимися хордами, так, чтобы из каждой точки выходила ровно одна хорда.

4. Докажите, что при иррациональном отношении α/β множество точек $(\{t\alpha\}, \{t\beta\})$, $t \in \mathbb{R}$ плотно в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

Напомним, что набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_s$ *линейно независимым* над $\mathbb{Q}$, если равенство $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ влечет равенство нулю всех α_i. (Например, независимость 1 и α означает иррациональность α).

5. Пусть $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что для любого n число $\{n\alpha\}/\{n\beta\}$ — иррационально.

6 (Двумерная теорема Кронекера). Пусть $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что множество точек $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$ плотно в квадрате $[0,1] \times [0,1]$

7. Докажите, что если многочлен неприводим как многочлен из $\mathbb{Z}_p[x]$, то он неприводим и как многочлен с целыми коэффициентами.

8 (Лемма Гаусса). Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда он неприводим над $\mathbb{Q}[x]$

9 (Критерий Эйзенштейна). Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$, причем для некоторого простого p коэффициент a_n не делится на p, коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$ делятся на p, но коэффициент a_0 не делится на p^2. Тогда f неприводим над $\mathbb{Z}$.